Skriptum zur Vorlesung
Signale und Systeme

Prof. Dr.-Ing. Eugen Müller

Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik
Hochschule München
Lothstraße 64
80335 München

Stand 27.03.2020

© **Alle Rechte vorbehalten.**

Es sind nur Vervielfältigungen des gesamten und unveränderten Skriptums zulässig.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung, Allgemeines, Normierung und Entnormierung **1**
1.1 Normierung und Entnormierung . . . 3

2 Wert- und zeitkontinuierliche ('analoge') Signale **4**
2.1 Symmetrien, Zerlegung in den geraden und den ungeraden Anteil . . . 4
2.2 Periodische Signale, weitere Symmetrien, Spektrum . . . 4
2.3 Sinusförmige Signale . . . 4
2.4 Nichtsinusförmige Signale . . . 5
2.5 Fourier-Reihen nichtsinusförmiger, periodischer Signale . . . 6
2.5.1 Summen von Sinus- und Cosinusfunktionen verschiedener Frequenzen . . . 6
2.5.2 Voraussetzungen bei Fourier-Reihen . . . 7
2.5.3 Konvergenz an Sprungstellen, Gibbs'sches Phänomen . . . 7
2.5.4 Fourier-Reihen modifizierter oder zusammengesetzter Zeitfunktionen . . . 8
2.6 Darstellungsformen von Fourier-Reihen . . . 10
2.6.1 Reelle Fourier-Reihe . . . 10
2.6.1.1 Cosinus- und Sinus-Anteile . . . 10
2.6.1.2 Betrag und Nullphasenwinkel von Sinus-Anteilen . . . 10
2.6.2 Komplexe Darstellung der Fourier-Reihe . . . 11
2.7 Umrechnung von Fourier-Koeffizienten . . . 11
2.8 Berechnung reeller Fourier-Reihen mit Integralen . . . 12
2.8.1 Berechnung der reellen Fourier-Koeffizienten . . . 12
2.8.2 Auswirkung von Symmetrien auf die reelle Fourier-Reihe . . . 13
2.9 Berechnung komplexer Fourier-Reihen mit Integralen . . . 19
2.9.1 Berechnung der komplexen Fourier-Koeffizienten . . . 19

2.9.2 Auswirkungen von Symmetrien auf die komplexe Fourier-Reihe 20
2.10 Die Diskrete Fourier-Transformation DFT 22
2.11 Wichtige Kenngrößen periodischer nichtsinusförmiger Signale 24
2.11.1 Arithmetischer Mittelwert 24
2.11.2 Effektivwert 24
2.11.3 Formfaktor 24
2.11.4 Klirrfaktor und Grundschwingungsgehalt 25
2.11.5 Scheitelfaktor 25
2.12 Leistungen bei nichtlinearen Verbrauchern 26
2.12.1 Der allgemeine Fall 26
2.12.2 Der wichtigste Spezialfall 26
2.13 Die Wirkung nichtlinearer Kennlinien auf sinusförmige Signale 30
2.13.1 Polynom-Kennlinie $\mathbf{i(u) = \sum c_n \cdot u^n}$ 30

3 Die Fourier-Transformation, einmalige Vorgänge 32
3.1 Definition der Fourier-Transformation, das Fourier-Integral 34
3.2 Gesetze der Fourier-Transformation 34
3.3 Beispiele zur Fourier-Transformation 37
3.4 Verwandtschaft komplexer Fourier-Koeffizienten mit der Spektraldichtefunktion . 40
3.5 Fourier-Reihen zeitverschobener periodischer Funktionen 42

4 Systembeschreibung im Zeitbereich und im Frequenzbereich 44
4.1 Differenzialgleichungen (DGL) zur Beschreibung im Zeitbereich 44
4.2 Übertragungs-Funktionen zur Beschreibung im Frequenzbereich 45
4.3 Stationäres Verhalten, Frequenzgang, Bode-Diagramm 48

5 Berechnung des Zeitverhaltens linearer, analoger Systeme 54
5.1 Durch Lösen der Differenzialgleichung (DGL) 54
5.1.1 Differenzialgleichungen 1. Ordnung 54
5.1.2 Differenzialgleichungen 2. Ordnung 60
5.2 Mit Hilfe der Laplace-Transformation 62
5.2.1 Laplace-Integral, Tabellen zur Laplace-Transformation 62
5.2.2 Lösung von DGL im Bildbereich der Laplace-Transformation 62
5.2.3 Direkte Lösung im Bildbereich ohne Aufstellen der DGL 66
5.2.4 DGL und Übertragungs-Funktion bei Netzwerken ohne Anfangswerte . . 68
5.2.5 Einheits-Impulsantwort (EIA) oder Gewichtsfunktion g(t) 70
5.2.6 Einheits-Sprungantwort (ESA) oder Übergangsfunktion h(t) 70
5.2.7 Partialbruch-Zerlegung (PBZ) von Bildfunktionen 71
5.3 Per Faltungsintegral aus dem Eingangssignal und der EIA 75
5.3.1 Anschauliche Deutung der Faltung mit dem Programm **FALTUNG** . . 75
5.3.2 Beispiele zur Faltung 76

6 Zeitdiskrete Signale 83
6.1 Übersicht der gebräuchlichen Signaldarstellungen 83
6.1.1 Quantisierung mit Analog-Digital-Wandlern 85
6.1.2 Besonderheiten der analogen und der digitalen Signalverarbeitung 85
6.2 Signalabtastung 87
6.2.1 Die Abtastung, das periodische Spektrum, Signalrückgewinnung 87
6.2.2 Das Abtasttheorem, Bandbegrenzung des abzutastenden Signals 90
6.2.3 Beispiel eines idealisierten Systems zur digitalen Signalverarbeitung . . . 93
6.2.4 Sample and Hold, sin(x)/x-Betragsentzerrer 94
6.2.5 Verzögerungselement, Verzögerungsoperator 95
6.3 Darstellung zeitdiskreter Signale 96
6.3.1 Wichtige, elementare zeitdiskrete Signale $\mathbf{x[k]}$ 96
6.3.2 Berechnung von Spektraldichtefunktionen (Spektren) 98
6.3.3 Fensterfunktionen 99
6.4 Systematische Ermittlung der Spektralfunktionen zeitdiskreter Signale 101
6.4.1 Die Diskrete Fourier-Transformation (DFT) 101

6.4.2 Die Schnelle Fourier-Transformation (Fast Fourier Transform, FFT) . . 103

7 Beschreibung zeitdiskreter LTI-Systeme 104
7.1 Grundlegende Eigenschaften zeitdiskreter Systeme 104
7.1.1 Linearität 104
7.1.2 Zeitinvarianz 104
7.1.3 Stabilität 104
7.1.4 Kausalität 104
7.2 Differenzengleichungen (DIFFGL) mit konstanten Koeffizienten 105
7.3 z-Transformation, Übertragungs-Funktion 106
7.3.1 Grenzwertsätze, Operationen und Korrespondenzen der z-Transformation 109
7.3.2 Beispiele zur Anwendung des Dämpfungssatzes von Seite 109 110

8 Bilinear-Transformation, Realisierung von DIFFGL 111
8.1 Berechnung zeitdiskreter Ü.-Fkt. mit der Bilinear-Transformation 111
8.2 Realisierung zeitdiskreter Systeme 114
8.2.1 Realisierung ohne Signalrückkopplungen: Transversal- oder FIR-Struktur 114
8.2.2 Realisierung mit Signalrückkopplungen: Rekursiv- oder IIR-Struktur . . . 117
8.3 Besonderheiten bei der Realisierung zeitdiskreter Systeme 118
8.3.1 Unerwünschte lineare Effekte 118
8.3.2 Unerwünschte nichtlineare Effekte 119
8.3.3 Benötigte Zusatzschaltungen in technischen zeitdiskreten Systemen 119

9 Berechnung des Zeitverhaltens zeitdiskreter Systeme 120
9.1 Berechnungen unter Verwendung der gebrochen rationalen Bildfunktion 120
9.1.1 Einheits-Impuls und Einheits-Sprung im Bildbereich der z-Transformation 120
9.1.2 Einheits-Impulsantwort (EIA, g[k]), Einheits-Sprungantwort (ESA, h[k]) . 120
9.1.3 Polynomdivision der Bildfunktion 121
9.1.4 Partialbruchzerlegung der Bildfunktion, gliedweise Rücktransformation . . 122
9.2 Berechnung der Ausgangsfolge $\mathbf{y}[\mathbf{k}]$ im Zeitbereich 124
9.2.1 Rekursive Berechnung von $\mathbf{y}[\mathbf{k}]$ aus der DIFFGL 124
9.2.2 Berechnung der Ausgangsfolge $\mathbf{y}[\mathbf{k}]$ mit der Faltungsoperation 125

10 Software, Übungen, Literatur 128

1 Einleitung, Allgemeines, Normierung und Entnormierung

In den Grundlagenvorlesungen zur Elektrotechnik wurden in den Semestern 1 und 2 bisher folgende Aufgabenstellungen behandelt:

- Verhalten und Analyse von Schaltungen bei Gleichstrom
- Grundlagen des magnetischen und des elektrischen Feldes
- Verhalten und Analyse von Schaltungen im eingeschwungenen Zustand bei sinusförmigem Wechselstrom

In dieser Vorlesung kommen wichtige Erweiterungen und auch völlig neue Betrachtungen hinzu.

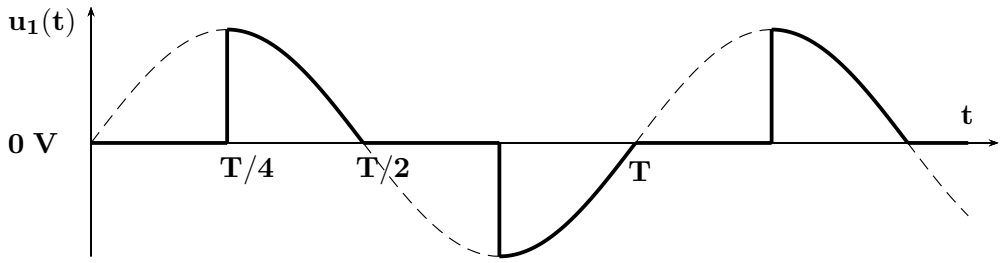
Der Begriff der **Signale** wird in diesem Semester recht allgemein gefasst, da nun auch nichtsinusförmige periodische und einmalige Vorgänge wie auch zeitdiskrete Signale behandelt werden.

Als **Systeme** werden in dieser Vorlesung (einfachere) elektrische Netzwerke und zeitdiskrete Anordnungen bezeichnet. Das grundlegende Verhalten wird beschrieben und näher untersucht.

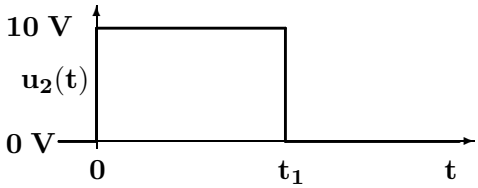
Zwei einfache Beispiele sollen verdeutlichen, dass technisch wichtige Aufgabenstellungen mit den Kenntnissen der Semester 1 und 2 noch nicht gelöst werden können.

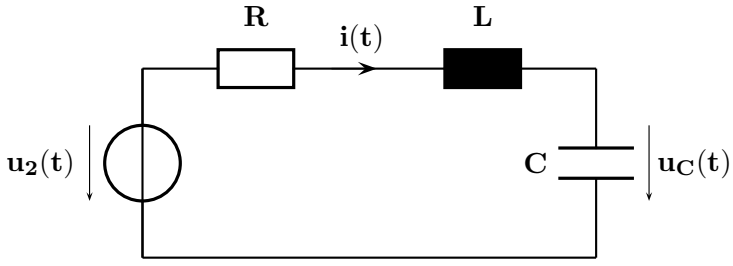
1.) Gesucht sei die Wirkleistung P, die die im Bild dargestellte nichtsinusförmige, periodische Spannung $\mathbf{u_1(t)}$ in einem ohmschen Widerstand hervorruft. Solche Signalformen treten in der Praxis bei der Steuerung oder Regelung von Motoren und Beleuchtungsanlagen auf.

Sinusspannung nach Phasenanschnittsteuerung. Dargestellt ist ein Stromflusswinkel von 90°.



2.) Gesucht sei der Zeitverlauf von $\mathbf{i(t)}$ oder $\mathbf{u_C(t)}$ als Folge der Eingangsspannung $\mathbf{u_2(t)}$.





In diesem Semester werden Methoden zur Lösung solcher und anderer Probleme besprochen und angewendet. Man begibt sich zur Erleichterung der Rechnung auch in so genannte 'Bildbereiche'.

Die meisten der hierzu benötigten Hilfsmittel wurden oder werden in den Mathematik-Vorlesungen behandelt und sind für das weitere Studium unerlässlich:

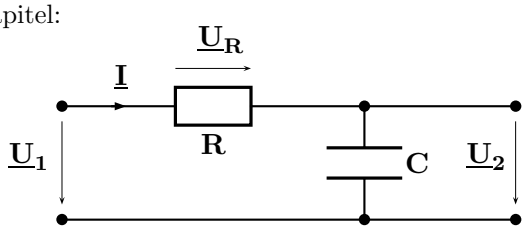
- Differenzial- und Integralrechnung
- Berechnung der Koeffizienten von Fourier-Reihen (Reelle und komplexe Darstellung)
- Berechnung der Spektraldichtefunktion mit dem Fourier-Integral (Einmalige Vorgänge)
- Aufstellen und Lösen von linearen Differenzial- und Differenzen-Gleichungen mit konstanten, reellen Koeffizienten
- Anwendung der Laplace- und der z-Transformation bei echt gebrochen rationalen Funktionen unter Verwendung von Partialbruch-Zerlegungen bei zeitkontinuierlichen und zeitdiskreten Systemen

Im Verlaufe dieses Semesters ist es erforderlich, den Frequenzbegriff (bisher $j\,\omega$) so zu verallgemeinern, dass durch die neue 'Frequenz-Variable' $\underline{s} = \sigma + j\,\omega$ eine ganze komplexe Frequenz-Ebene abgedeckt wird.

Dabei zeigt sich, dass an zwei Stellen ($\mathbf{\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^*}$ und $\mathbf{j\,\omega = j\,2 \cdot \pi \cdot f}$) eine Modifikation der komplexen Rechnung zur Anpassung an die Bedürfnisse der Elektrotechnik erforderlich ist, da dieses Werkzeug von seinen Erfindern Bernoulli, Euler und Gauß ursprünglich für etwas vollständig Anderes nämlich zur gleichmäßigen Teilung eines Kreises in 13 oder 17 Abschnitte entwickelt wurde.

Ein Beispiel zur Wiederholung, Ausblick auf das nächste Kapitel:

Man berechne $\mathbf{\underline{I}}$, $\mathbf{u_1(t)}$, $\mathbf{\underline{U_2}}$ und $\mathbf{u_2(t)}$, wenn gilt
$\mathbf{\underline{U}_1 = 10\ V}$; $\mathbf{f = 50\ Hz}$ mit Sinusform
und $\mathbf{R = 100\ \Omega}$; $\mathbf{C = 31.8\ \mu F}$; $\tau = \mathbf{RC} = \frac{1}{\omega_g}$.



Lösung: Komplexe Rechnung bei der einzigen enthaltenen Frequenz f = 50 Hz ergibt

$$\mathbf{\underline{Z}_C = \frac{1}{j\,\omega C} = \frac{1}{j\,2 \cdot \pi \cdot 50\ Hz \cdot 31.8 \cdot 10^{-6}\ F} = -j\,100\Omega}$$

$$\mathbf{\underline{I} = \frac{\underline{U}_1}{R + \underline{Z}_C} = \frac{10\ V}{100\Omega(1-j)} = \frac{0.1\ A}{1-j} = \frac{0.1\ A(1+j)}{1^2+(-1)^2} = 50\,mA(1+j)}$$

$$\mathbf{\underline{U_2} = \underline{I} \cdot \underline{Z}_C = 50\ mA(1+j)(-j\,100\Omega) = 5\,V(1-j)}$$

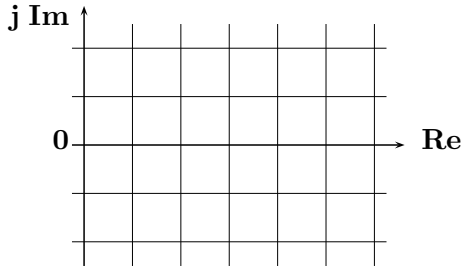
Zeitfunktionen dazu: Mit $\mathbf{u_1(t) = 10\,V \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 50\frac{1}{sec} \cdot t + 0°)}$ erhält man

$\mathbf{i(t) = 100\,mA \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 50\frac{1}{sec} \cdot t + 45°)}$ und $\mathbf{u_2(t) = 10\,V \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 50\frac{1}{sec} \cdot t - 45°)}$

Zeigerdiagramm:

U : 2.5 V / Einheit

I : 25 mA / Einheit



Effektivwerte : $\mathbf{I_{eff} = \cdot\sqrt{2}\,mA}$

$\mathbf{U_{1\,eff} = V}$

$\mathbf{U_{2\,eff} = \cdot\sqrt{2}\,V}$

Liegt als $\mathbf{u_1(t)}$ nun eine nichtsinusförmige, periodische Spannung mit der Grundkreisfrequenz ω_1 an, wird die Berechnung der Ausgangsspannung $\mathbf{u_2(t)}$ erheblich komplizierter:

Die in $\mathbf{u_1(t)}$ enthaltenen Frequenz-Komponenten werden durch die Tiefpass-Wirkung des RC-Gliedes mit verschiedenen komplexen Verstärkungen (Betrag und Winkel) übertragen. Deshalb wird das Ausgangssignal im Allgemeinen eine andere Kurvenform als das Eingangssignal besitzen.

- Die Spannung $\mathbf{u_1(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin(n\omega_1 t + \varphi_n)}$ wird als Fourier-Reihe dargestellt.
- Jede Komponente des Linienspektrums mit der n-fachen Grundfrequenz wird mit der zugehörigen komplexen Verstärkung multipliziert und ergibt den komplexen Beitrag dieser Frequenz.

  $$\mathbf{\underline{G}(j\,n\omega_1) = \frac{\underline{U_2}(j\,n\omega_1)}{\underline{U_1}(j\,n\omega_1)} = \frac{\frac{1}{j\,n\omega_1 C}}{R+\frac{1}{j\,n\omega_1 C}} = \frac{1}{1+j\,n\omega_1 RC} = \frac{1}{1+j\,n\omega_1/\omega_g} = |\underline{G}(j\,n\omega_1)| \cdot e^{j\,\gamma_n}}$$

- Die Zeitfunktion am Ausgang erhält man durch das Aufsummieren der komplexen Beiträge.

  $$\mathbf{u_2(t) = A_0 \cdot G(0) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot |\underline{G}(j\,n\omega_1)| \cdot \sin(n\omega_1 t + \varphi_n + \gamma_n)}$$

Zur Lösung dieser neuartigen Aufgabenstellung kommt man, in dem nacheinander bei allen Frequenzkomponenten die gleichen Methoden (Komplexe Rechnung, siehe oben) angewendet werden, wie bei sinusförmigen Vorgängen im 2. Semester.

1.1 Normierung und Entnormierung

Im praktischen Gebrauch ist es häufig vorteilhaft, die Berechnungen von Signalen und Systemen mit normierten Größen durchzuführen. Dann ist es nicht erforderlich, die Einheiten aller Größen mit zuführen und man erreicht auch, dass die Zahlenwerte näher zusammen liegen.

Bei der NORMIERUNG bildet man aus einer physikalischen Größe ($\widehat{=}$ Zahlenwert · Einheit) und aus einer gleichartigen Bezugsgröße ($\widehat{=}$ Zahlenwert · Einheit) eine dimensionslose normierte Größe ($\widehat{=}$ Zahlenwert) :

$$\text{NORMIERTE GRÖSSE} = \frac{\text{PHYSIKALISCHE GRÖSSE}}{\text{GLEICHARTIGE BEZUGSGRÖSSE}}$$

Zum Überführen normierter Größen in technisch verwertbare, physikalische Größen ist der umgekehrte Vorgang erforderlich. Bei der ENTNORMIERUNG berechnet man aus einer dimensionslosen normierten Größe ($\widehat{=}$ Zahlenwert) und einer geeigneten Bezugsgröße ($\widehat{=}$ Zahlenwert · Einheit) die zugehörige physikalische Größe ($\widehat{=}$ Zahlenwert · Einheit) :

$$\text{PHYSIKALISCHE GRÖSSE} = \text{NORMIERTE GRÖSSE} \cdot \text{BEZUGSGRÖSSE}$$

Für die Normierung elektrischer Schaltungen benötigt man nur die folgenden drei Gleichungen.

$$\mathbf{R_B = 2\pi f_B L_B} \quad (1) \qquad \mathbf{C_B = \frac{1}{2\pi f_B R_B}} \quad (2) \qquad \mathbf{U_B = I_B \cdot R_B} \quad (3)$$

Der Anwender kann zwei der in den Gln. (1) und (2) auftretenden vier Bezugsgrößen

$\mathbf{R_B}$ (Impedanzniveau), $\mathbf{f_B}$ (Frequenzlage), $\mathbf{L_B}$, $\mathbf{C_B}$

und dazu eine der in der Gleichung (3) vorkommenden Bezugsgrößen

$\mathbf{U_B}$ (Spannungsniveau) und $\mathbf{I_B}$ (Stromniveau) frei wählen.

Aus dem Produkt der Gln. (1) und (2) ergibt sich als weitere Bezugsgröße die Bezugszeit.

$$\mathbf{T_B = \frac{1}{\omega_B} = \frac{1}{2\pi f_B} = R_B C_B = \frac{L_B}{R_B}}$$

- Frequenz-Normierung: Normierte Frequenz $\mathbf{\Omega = \frac{f}{f_B} = \frac{\omega}{\omega_B} = \frac{2\pi f}{2\pi f_B}}$.
- Zeit-Normierung: Normierte Zeit $\mathbf{\widetilde{t} = \frac{t}{T_B} = t \cdot 2\pi f_B}$.
- Spannungs- und Stromnormierung: $\mathbf{\widetilde{u} = \frac{U}{U_B}}$; $\mathbf{\widetilde{i} = \frac{I}{I_B}}$.

Ü 1 - Ü 3

Beispiele zur Normierung :

$\mathbf{R = 10\ k\Omega}$; $\mathbf{R_B = 5\ k\Omega}$; $\mathbf{r = \frac{R}{R_B} = 2}$

$\mathbf{f = 50\ kHz}$; $\mathbf{T_B = 0.159 \cdot 10^{-4}\ sec}$; $\mathbf{\Omega = \frac{f}{f_b} = \frac{f}{\frac{1}{2\pi T_B}} = 5}$

Beispiele zur Entnormierung :

$\mathbf{\widetilde{t} = 0.05}$; $\mathbf{T_B = 200\ \mu sec}$; $\mathbf{t = \widetilde{t} \cdot T_B = 10\ \mu sec}$

$\mathbf{T_B = 50\ msec}$; $\mathbf{L_B = 0.1\ H}$; $\mathbf{r = 2}$; $\mathbf{R = r \cdot R_B = r \cdot \frac{L_B}{T_B} = r \cdot \frac{L_B}{T_B} = 2 \cdot 2\ \Omega = 4\ \Omega}$

2 Wert- und zeitkontinuierliche ('analoge') Signale

Obwohl eine Verallgemeinerung auf komplexe Zeitfunktionen möglich ist, werden in dieser Vorlesung nur reelle Zeitfunktionen betrachtet.

Wertkontimuierlich sind Signale, bei denen jeder Momentanwert darstellbar ist.
Zeitkontinuierlich nennt man solche Signale, die zu jeder Zeit definiert sind.

Für das weitere Verständnis ist es hilfreich, zunächst mögliche Signal-Symmetrien zu betrachten und eine systematische Aufteilung von Signalen in ihren geraden und ungeraden Anteil vorzunehmen.

2.1 Symmetrien, Zerlegung in den geraden und den ungeraden Anteil

Jede Zeitfunktion (betrachtet wird hier als Beispiel eine Spannung, die Überlegungen gelten jedoch in gleicher Weise auch für alle anderen Signale) $\mathbf{u(t)}$ kann zerlegt werden in ihren geraden, also achsensymmetrischen Anteil $\mathbf{u_g(t)}$ und in ihren ungeraden, also punktsymmetrischen Anteil $\mathbf{u_u(t)}$ so dass gilt $\mathbf{u(t) = u_g(t) + u_u(t)}$.

Eine systematische Zerlegung ist immer mit Hilfe der folgenden Gleichungen möglich.

$$\mathbf{u_g(t) = \frac{u(t) + u(-t)}{2}} \; ; \qquad \mathbf{u_u(t) = \frac{u(t) - u(-t)}{2}}$$

Ü 4

2.2 Periodische Signale, weitere Symmetrien, Spektrum

Gilt bei einem Signal die Beziehung $\mathbf{u(t) = u(t + T)}$, wiederholt es sich nach der 'Periodendauer' genannten Zeit T identisch und wird als periodisches Signal bezeichnet.

Es wird sich zeigen, dass in den Spektren periodischer Signale grundsätzlich nur diskrete Frequenzlinien bei ganzzahligen Vielfachen ihrer Grundfrequenz $\mathbf{f_1 = \frac{1}{T}}$ auftreten.
Das Spektrum periodischer Signale ist deshalb ein Linienspektrum.

Von einer gewissen Bedeutung sind zwei weitere mögliche Signal-Symmetrien, die sich auf den Verlauf der beiden Halbperioden beziehen:

- Von einer geraden Halbperioden-Symmetrie spricht man, wenn sich das Signal in jeder Halbperiode identisch wiederholt $\mathbf{u(t + \frac{T}{2}) = u(t)}$.
- Von einer ungeraden Halbperioden-Symmetrie spricht man dagegen, wenn sich das Signal in jeder Halbperiode mit entgegengesetztem Vorzeichen wiederholt $\mathbf{u(t + \frac{T}{2}) = -u(t)}$

2.3 Sinusförmige Signale

Solche Signale können in zwei gleichwertigen Varianten reell dargestellt werden. Hier treten nur positive Kreisfrequenzen auf, so dass man ein einseitiges Linienspektrum erhält:

- Amplitude und Sinus-Nullphasenwinkel: $\mathbf{u(t) = A_1 \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \; ; A_1 > 0}$ (1)
- Cosinus- und Sinusamplitude: $\mathbf{u(t) = a_1 \cdot \cos(\omega_1 t) + b_1 \cdot \sin(\omega_1 t)}$ (2)

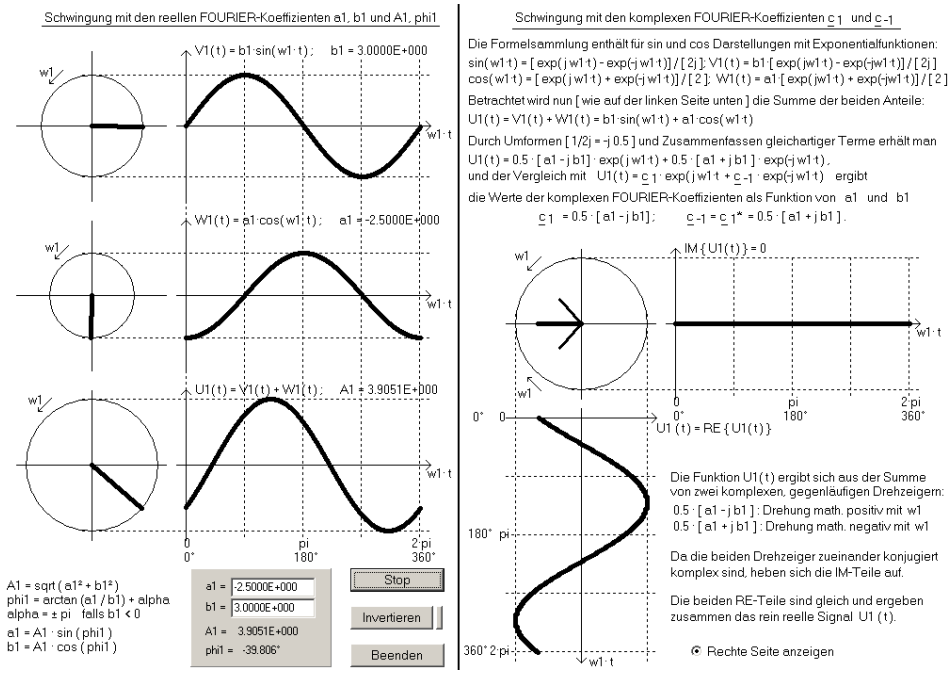
Mit Hilfe der aus der Mathematik bekannten Äquivalenzen

$$\mathbf{\cos(\omega_1 t) = \frac{e^{j\omega_1 t} + e^{-j\omega_1 t}}{2}} \quad \text{und} \quad \mathbf{\sin(\omega_1 t) = \frac{e^{j\omega_1 t} - e^{-j\omega_1 t}}{2j}}$$

kann man aus Gl. (2) zwei weitere gleichwertige, nun aber komplexe Darstellungen mit positiven und negativen Kreisfrequenzen ermitteln, die auf ein zweiseitiges Linienspektrum führen:

- $\mathbf{u(t) = \underline{c}_1 \cdot e^{j\omega_1 t} + \underline{c}_{-1} \cdot e^{-j\omega_1 t}}$ mit $\mathbf{\underline{c}_1 = \frac{a_1 - j b_1}{2}}$; $\mathbf{\underline{c}_{-1} = \underline{c}_1^*}$
- $\mathbf{u(t) = |\underline{c}_1| \cdot e^{j(\omega_1 t + \Phi_1)} + |\underline{c}_{-1}| \cdot e^{-j(\omega_1 t + \Phi_1)}}$

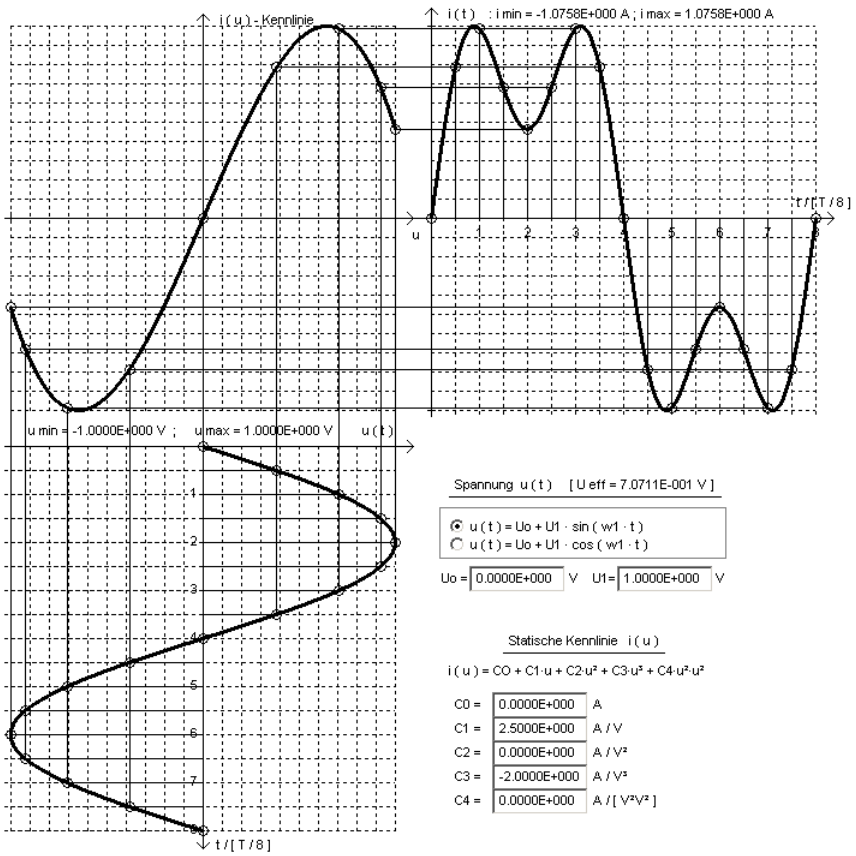
Das folgende, mit dem Programm **SINUS** erzeugte Bild zeigt an einem Beispiel, wie aus zwei gegenläufigen komplexen Drehzeiger eine reelle Sinusschwingung mit Phasenverschiebung entsteht.



2.4 Nichtsinusförmige Signale

Betreibt man ein elektrisches Bauelement mit der nichtlinearen statischen Kennlinie $\mathbf{i(u)}$ an einer sinusförmigen Spannung $\mathbf{u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega_1 t)}$ fließt ein Strom $\mathbf{i(t)}$, dessen Verlauf zwar weiterhin periodisch aber nicht mehr sinusförmig ist (Auf Seite 30 folgen Einzelheiten dazu.).

Das im Bild dargestellte mit dem Programm **POLYNOM_KENNLINIE** berechnete Beispiel enthält auch die punktweise Konstruktion der verzerrten Zeitfunktion des Stroms $\mathbf{i(t)}$.



2.5 Fourier-Reihen nichtsinusförmiger, periodischer Signale

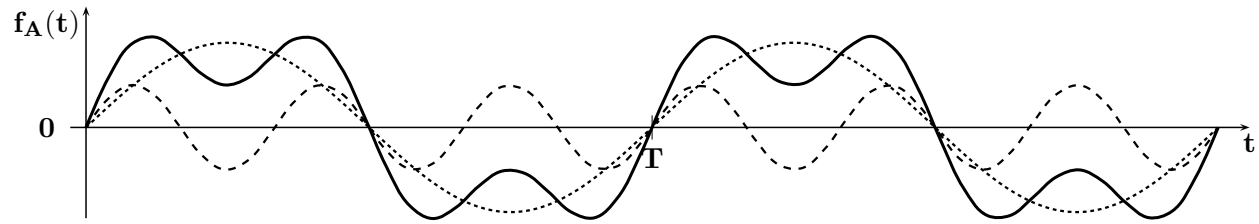
Die Idee für diese Darstellung geht zurück auf Joseph de Fourier (1768 - 1830), der sich mehrere Jahre mit Funktionenreihen beschäftigte und 1822 ein Buch darüber veröffentlichte.

Der Gedanke dieser Arbeit war es, periodische Funktionen exakt durch Reihen trigonometrischer Funktionen (die ja ebenfalls periodisch verlaufen) darzustellen oder als Näherung eine Partialsumme trigonometrischer Funktionen zu verwenden.

In dieser Vorlesung werden bevorzugt Funktionen der Zeit $\mathbf{f(t)}$, $\mathbf{u(t)}$, usw. betrachtet. Die in der Mathematik übliche Schreibweise $\mathbf{f(x)}$ mit $\mathbf{x = \omega \cdot t}$ wird ebenfalls bei Bedarf verwendet.

2.5.1 Summen von Sinus- und Cosinusfunktionen verschiedener Frequenzen

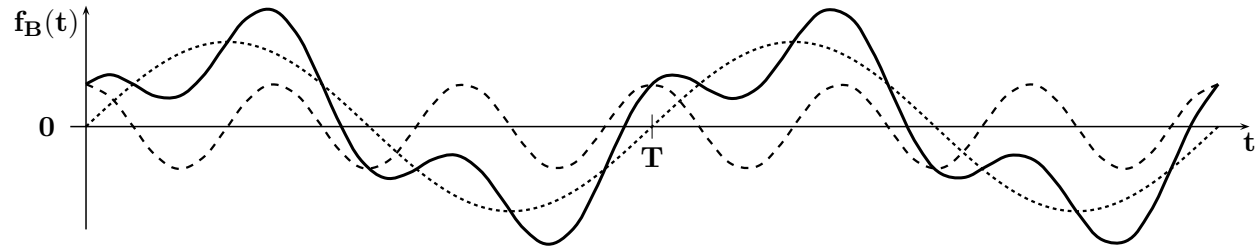
Beispiel A: $\mathbf{f_A(t) = \sin(2\pi f_1 t) + 0.5 \cdot \sin(2\pi 3 f_1 t) = \sin(\omega_1 t) + 0.5 \cdot \sin(3\omega_1 t) = f_1(t) + f_3(t)}$



Wie dieses Beispiel zeigt, ergibt die Summe zweier (periodischer) Sinusfunktionen (hier mit einem ganzzahligem Frequenzverhältnis drei) wieder eine periodische Zeitfunktion, deren Form jedoch von der Sinusform abweicht.

Hier kann $\mathbf{f_1(t)}$ als die Grundschwingung (1. Harmonische) mit der Grundkreisfrequenz ω_1 und $\mathbf{f_3(t)}$ als eine Oberschwingung (3. Harmonische) mit der dreifachen Grundkreisfrequenz bezeichnet werden.
Die Periodendauer $\mathbf{T}$ der Summenfunktion $\mathbf{f_A(t)}$ wird hier durch die Periodendauer von $\mathbf{f_1(t)}$ bestimmt: $\mathbf{T = \frac{1}{f_1} = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_1}}$

Beispiel B: $\mathbf{f_B(t) = \sin(\omega_1 t) + 0.5 \cdot \sin(3\omega_1 t + 90^o) = \sin(\omega_1 t) + 0.5 \cdot \cos(3\omega_1 t) = f_1(t) + \widetilde{f}_3(t)}$



Im Vergleich zum Beispiel A wurde bei gleichen Amplituden und gleichen Frequenzen nur ein Phasenwinkel variiert. Der zugehörige Zeitverlauf $\mathbf{f_B(t)}$ wird dadurch stark verändert.
Auch dieser Verlauf ist periodisch und besitzt die gleiche Periodendauer $\mathbf{T}$ des ersten Beispiels.

Die Periodendauer $\mathbf{T}$ einer Summe allgemeiner Sinussignale wird wie folgt ermittelt.

$$\mathbf{f(t) = A_p \cdot \sin(p \cdot \omega_1 t + \varphi_p) + A_q \cdot \sin(q \cdot \omega_1 t + \varphi_q) + A_r \cdot \sin(r \cdot \omega_1 t + \varphi_r) + \cdots}$$

Zu berücksichtigen ist, dass in $\mathbf{T}$ eine ganzzahlige Anzahl aller Teilschwingungen auftreten muss:

$$\mathbf{T = n_p \cdot T_p = n_q \cdot T_q = n_r \cdot T_r \cdots = \frac{n_p}{f_p} = \frac{n_q}{f_q} = \frac{n_r}{f_r} \cdots}$$

wobei alle Zahlen $\mathbf{n_p}$, $\mathbf{n_q}$, $\mathbf{n_r}$, $\cdots$ ganzzahlig und teilerfremd sein müssen.

Beispiel: $\mathbf{f(t) = \sin(2\pi 600t/sec) + \sin(2\pi 3000t/sec + \pi/4) + \sin(2\pi 4000t/sec - \pi/3)}$

Gesucht: Periodendauer $\mathbf{T}$ des Signals $\mathbf{f(t)}$

Lösung: Zerlegung der Frequenzwerte in Faktoren (hier ohne Einheiten) Ü 5

$$600 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot \mathbf{3} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{n_p = 3}$$
$$3000 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot \mathbf{3 \cdot 5} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{n_q = 3 \cdot 5 = 15}$$
$$4000 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot \mathbf{2 \cdot 5 \cdot 2} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{n_r = 2 \cdot 5 \cdot 2 = 20}$$

Daraus erhält man die gesuchte Periodendauer $\mathbf{T = \frac{3}{600\,Hz} = \frac{15}{3000\,Hz} = \frac{20}{4000\,Hz} = \frac{1}{200}\,sec}$

In diesem Beispiel dauern 3 Perioden der Teilfunktion mit $\mathbf{f_p = 600\,Hz}$ genau so lange, wie
15 Perioden der Teilfunktion mit $\mathbf{f_q = 3000\,Hz}$ und wie
20 Perioden der Teilfunktion mit $\mathbf{f_r = 4000\,Hz}$.

2.5.2 Voraussetzungen bei Fourier-Reihen

Damit nichtsinusförmige, periodische Funktionen $\mathbf{f(t)}$ bzw. $\mathbf{f(x)}$ durch Summen allgemeiner Sinusfunktionen angenähert oder durch Reihen allgemeiner Sinusfunktionen dargestellt werden können, müssen folgende Voraussetzungen erfüllt sein:

- Die Funktion $\mathbf{f(t)}$ bzw. $\mathbf{f(x)}$ muss die Periodendauer $\mathbf{T}$ bzw. $\mathbf{2\pi}$ besitzen, so dass gilt $\mathbf{f(t+T) = f(t)}$ bzw. $\mathbf{f(x+2\pi) = f(x)}$.
- Die Funktion besitzt inerhalb einer Periode nur endlich viele Unstetigkeitsstellen und nur eine endliche Anzahl von Minima und Maxima.
- Die Funktion nimmt nur endliche Werte an.

Da praktisch alle in der Technik auftretenden periodischen, zeitabhängigen Vorgänge $\mathbf{f(t)}$ bzw. $\mathbf{f(x)}$ (z.B. Spannungen, Ströme, mechanische Schwingungen, usw.) diese Voraussetzungen erfüllen, können sie durch Fourier-Reihen dargestellt werden.

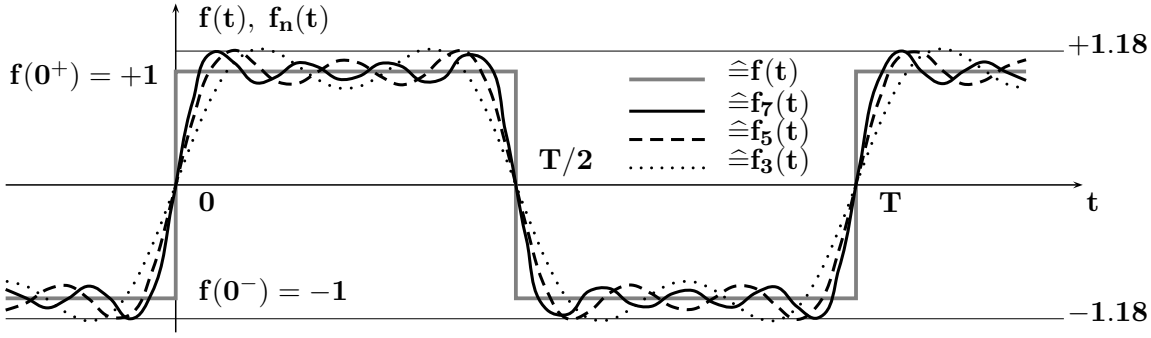
2.5.3 Konvergenz der Fourier-Reihe an Sprungstellen, Gibbs'sches Phänomen

Betrachtet man mit dem Programm **FOURIER_REIHE** z.B. die Partialsummen $\mathbf{f_n(t)}$ von Zeitfunktionen mit Sprungstellen, zeigt sich, dass diese Summen an den Sprungstellen gegen das arithmetische Mittel der Funktionswerte rechts und links der Unstetigkeitsstellen $\mathbf{t_0}$ konvergieren:

$$\mathbf{f_n(t_0)} \;\cong\; \frac{\mathbf{f(t_0^-) + f(t_0^+)}}{\mathbf{2}}$$

Jede Partialsumme mit genügend großem, aber endlichem $\mathbf{n}$ zeigt bei Rechtecksignalen in der Umgebung ihrer Sprungstellen ein Über- und Unterschwingen um jeweils rund 9 % der Sprunghöhe. Dieses nach seinem Entdecker Gibbs benannte Phänomen tritt bei allen Partialsummen auf; es verschwindet erst bei der unendlichen Reihe.

Mit dem Programm **FOURIER_REIHE** kann dieses Phänomen z.B. bei den Funktionen $\mathbf{f_1(t)}$, $\mathbf{f_3(t)}$, $\mathbf{f_9(t)}$ beobachtet und durch Erhöhung des Summen-Index in Verbindung mit einer Änderung von $\mathbf{t_{max}}$ studiert werden.



Rechteckpuls $\mathbf{f(t)}$ mit der Sprunghöhe 2 und den Partialsummen $\mathbf{f_3(t)}$, $\mathbf{f_5(t)}$, $\mathbf{f_7(t)}$.

In praktischen Anwendungen darf das Gibbs'sche Phänomen nicht mit dem Überschwingen der Sprungantwort eines linearen, technischen Systems verwechselt werden. Dort legen die Polstellen fest, welche Frequenzanteile die Zeitfunktion enthält und das Überschwingen tritt nur als Folge und deshalb grundsätzlich nur nach einem Sprung auf.

Die maximale Überschwingweite $\mathbf{\ddot{u}}$ kann bei schwingungsfähigen Systemen sehr unterschiedliche Werte ($\mathbf{0.1\,\% \le \ddot{u} \le 100\,\%}$) annehmen.

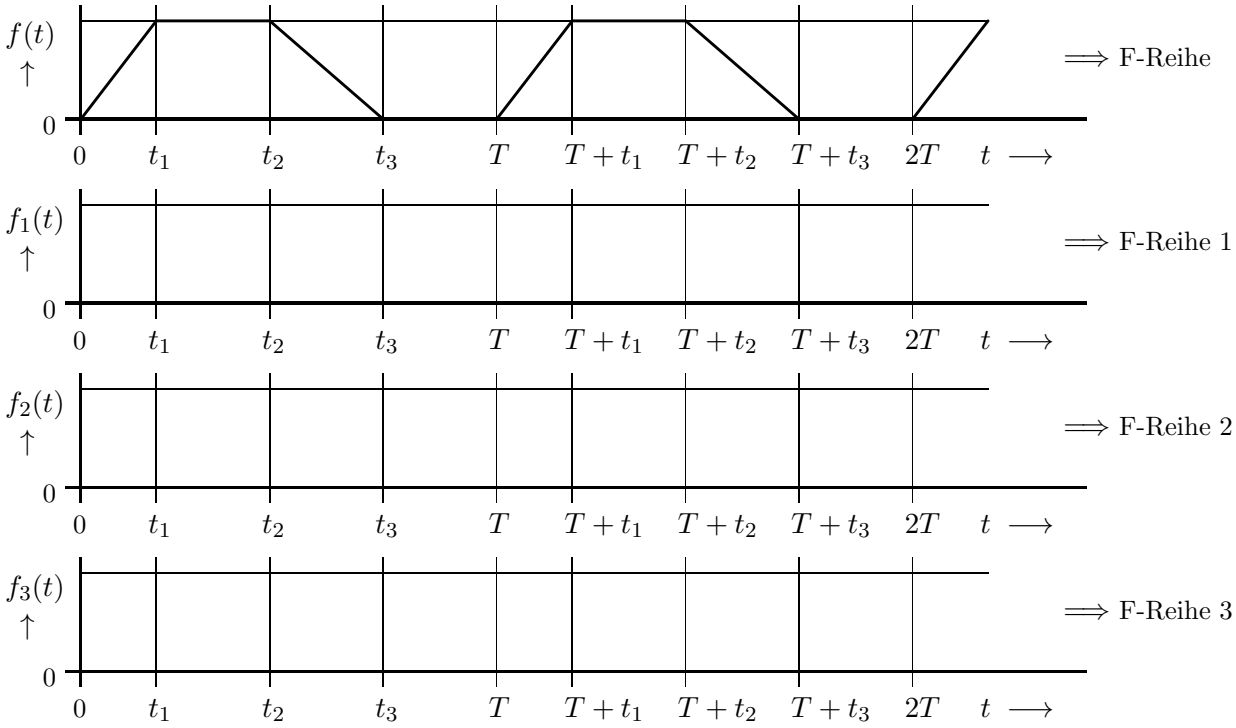
2.5.4 Fourier-Reihen modifizierter oder zusammengesetzter Zeitfunktionen

Lineare Modifikationen (Ableiten, Integrieren) lassen sich auch auf Fourier-Reihen anwenden:

Zu $\mathbf{u(t) = \frac{d\,f(t)}{dt}}$ gehört die Fourier-Reihe $\mathbf{u(t) = \frac{d}{dt}}$ {Fourier-Reihe [$\mathbf{f(t)}$]}.

Zu $\mathbf{v(t) = \int f(t)\,dt}$ gehört die Fourier-Reihe $\mathbf{v(t) = \int}$ {Fourier-Reihe [$\mathbf{f(t)}$]} $\mathbf{dt}$.

Kann eine Zeitfunktion $\mathbf{f(t)}$ in eine Summe mehrerer Teilfunktionen $\mathbf{f(t) = \pm f_1(t) \pm f_2(t) \pm f_3(t)}$ zerlegt werden, ergibt sich ihre Fourier-Reihe aus der Summe der Fourier-Reihen aller Teilfunktionen.



Da jede Zeitfunktion durch ihre Fourier-Reihe exakt dargestellt wird, gilt

$\mathbf{f(t) = \pm f_1(t) \pm f_2(t) \pm f_3(t)}$ $\iff$ **F**- Reihe = ± **F**- Reihe 1 ± **F**- Reihe 2 ± **F**- Reihe 3

Jede Zeitfunktion kann auch zerlegt werden in

ihren geraden Anteil $\mathbf{f_g(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2}}$ [für diesen gilt $\mathbf{f_g(t) = f_g(-t)}$] und

ihren ungeraden Anteil $\mathbf{f_u(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2}}$ [für diesen gilt $\mathbf{f_u(t) = -f_u(-t)}$].

In diesem Fall kann man wegen der Symmetrie-Eigenschaften eindeutig zuordnen, welche trigonometrische Funktionen in welcher Teil-Reihe ausschließlich auftreten.

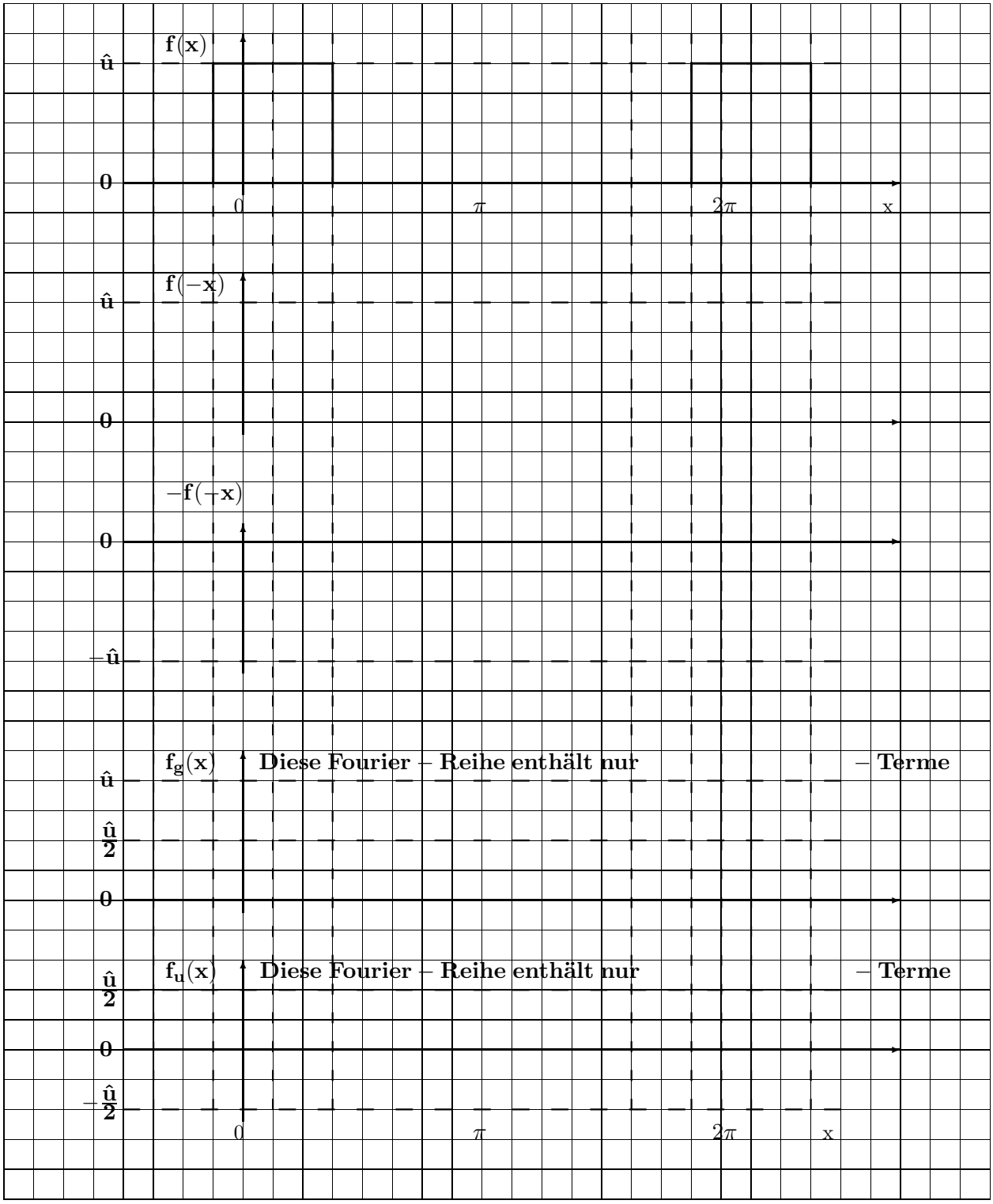
$\mathbf{f(t) = f_g(t) + f_u(t)}$ $\iff$ **F**-Reihe = $\mathbf{F_g}$-Reihe (cosinus-Terme) + $\mathbf{F_u}$-Reihe (sinus-Terme)

Die Zerlegung kann -falls die Gleichung für die Zeitfunktion vorliegt- mathematisch erfolgen.
Ist der Verlauf dagegen als Graph gegeben, soll die Zerlegung grafisch vorgenommen werden.

Auf der folgenden Seite ist ein Beispiel zur systematischen, graphischen Zerlegung einer Funktion $\mathbf{f(x)}$ in deren geraden und ungeraden Anteil vorbereitet.

Verwenden Sie zur Lösung mehrere Farben, damit das Bild übersichtlich und gut lesbar bleibt.

Zerlegung einer Funktion in ihren geraden und ungeraden Anteil



$$\textbf{GeraderAnteil}: \quad \mathbf{f_g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}}$$

$$\textbf{UngeraderAnteil}: \quad \mathbf{f_u(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}}$$

2.6 Darstellungsformen von Fourier-Reihen

Je nach Aufgabenstellung und Anwendung sind für Fourier-Reihen mehrere, völlig gleichwertige Darstellungen gebräuchlich. Deren Bezeichnungen und Besonderheiten werden nun betrachtet.

2.6.1 Reelle Fourier-Reihe

2.6.1.1 Cosinus- und Sinus-Anteile

In Abhängigkeit von der Zeit $\mathbf{t}$ gilt

$$\mathbf{f(t) = f_g(t) + f_u(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega_1 t) + a_2 \cos(2\omega_1 t) + a_3 \cos(3\omega_1 t) + \ldots + b_1 \sin(\omega_1 t) + b_2 \sin(2\omega_1 t) + b_3 \sin(3\omega_1 t) + \ldots}$$

oder gleichwertig abgekürzt

$$\mathbf{f(t) = f_g(t) + f_u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_1 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_1 t)}$$

Mit dem Argument $\boxed{\mathbf{x = \omega_1 t}}$ gilt

$$\mathbf{f(x) = f_g(x) + f_u(x) = a_0 + a_1 \cos(x) + a_2 \cos(2x) + a_3 \cos(3x) + \ldots + b_1 \sin(x) + b_2 \sin(2x) + b_3 \sin(3x) + \ldots}$$

oder gleichwertig abgekürzt

$$\mathbf{f(x) = f_g(x) + f_u(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)}$$

Die reellen Kennwerte dieser Darstellung ($\mathbf{a_0}$, $\mathbf{a_1, a_2, a_3 \ldots}$, $\mathbf{b_1, b_2, b_3 \ldots}$) werden Fourier-Koeffizienten genannt. Ihre Werte können positiv, Null oder negativ sein. Bei dieser Darstellung der Fourier-Reihe lassen sich Symmetrien sowie gerade oder ungerade Anteile unmittelbar ablesen.

2.6.1.2 Betrag und Nullphasenwinkel von Sinus-Anteilen

In Abhängigkeit von der Zeit $\mathbf{t}$ gilt

$$\mathbf{f(t) = A_0 + A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \sin(2\omega_1 t + \varphi_2) + A_3 \sin(3\omega_1 t + \varphi_3) + \ldots}$$

oder gleichwertig abgekürzt

$$\mathbf{f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega_1 t + \varphi_n)}$$

Mit dem Argument $\boxed{\mathbf{x = \omega_1 t}}$ gilt

$$\mathbf{f(x) = A_0 + A_1 \sin(x + \varphi_1) + A_2 \sin(2x + \varphi_2) + A_3 \sin(3x + \varphi_3) + \ldots}$$

oder gleichwertig abgekürzt

$$\mathbf{f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx + \varphi_n)}$$

Die reellen Kennwerte dieser Darstellung sind der Gleichanteil $\boxed{\mathbf{-\infty < A_0 < \infty}}$,
die Amplituden der einzelnen Teilschwingungen $\boxed{\mathbf{A_n \geq 0}}$ [$\mathbf{n \geq 1}$] sowie
die Phasenwinkel $\mathbf{-180° \leq \varphi_n \leq +180°}$ [$\mathbf{n \geq 1}$].

Diese Größen lassen sich aus den reellen Fourier-Koeffizienten $\mathbf{a_n}$, $\mathbf{b_n}$ berechnen.

Ü 6

2.6.2 Komplexe Darstellung der Fourier-Reihe

In Abhängigkeit von der Zeit $\mathbf{t}$ gilt

$$\mathbf{f(t)} = \ldots + \underline{\mathbf{c}}_{\mathbf{-2}}\, \mathbf{e}^{-\mathbf{j}\,2\,\omega_1 \mathbf{t}} + \underline{\mathbf{c}}_{\mathbf{-1}}\, \mathbf{e}^{-\mathbf{j}\,1\,\omega_1 \mathbf{t}} + \underline{\mathbf{c}}_{\mathbf{0}} + \underline{\mathbf{c}}_{\mathbf{1}}\, \mathbf{e}^{+\mathbf{j}\,1\,\omega_1 \mathbf{t}} + \underline{\mathbf{c}}_{\mathbf{2}}\, \mathbf{e}^{+\mathbf{j}\,2\,\omega_1 \mathbf{t}} + \ldots$$

oder gleichwertig abgekürzt $\mathbf{f(t)} = \sum_{\mathbf{n}=-\infty}^{\infty} \underline{\mathbf{c}}_{\mathbf{n}}\, \mathbf{e}^{\mathbf{j}\,\mathbf{n}\,\omega_1 \mathbf{t}}$

Mit dem Argument $\boxed{\mathbf{x} = \omega_1\, \mathbf{t}}$ gilt

$$\mathbf{f(x)} = \ldots + \underline{\mathbf{c}}_{\mathbf{-2}}\, \mathbf{e}^{-\mathbf{j}\,2\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{c}}_{\mathbf{-1}}\, \mathbf{e}^{-\mathbf{j}\,\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{c}}_{\mathbf{0}} + \underline{\mathbf{c}}_{\mathbf{1}}\, \mathbf{e}^{+\mathbf{j}\,\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{c}}_{\mathbf{2}}\, \mathbf{e}^{+\mathbf{j}\,2\mathbf{x}} + \ldots$$

oder gleichwertig abgekürzt $\mathbf{f(x)} = \sum_{\mathbf{n}=-\infty}^{\infty} \underline{\mathbf{c}}_{\mathbf{n}}\, \mathbf{e}^{\mathbf{j}\,\mathbf{n}\mathbf{x}}$

Die Kennwerte dieser Darstellung ($\ldots, \underline{\mathbf{c}}_{\mathbf{-3}}, \underline{\mathbf{c}}_{\mathbf{-2}}, \underline{\mathbf{c}}_{\mathbf{-1}}, \underline{\mathbf{c}}_{\mathbf{0}}, \underline{\mathbf{c}}_{\mathbf{1}}, \underline{\mathbf{c}}_{\mathbf{2}}, \underline{\mathbf{c}}_{\mathbf{3}}, \ldots$) sind im allgemeinen Fall komplexe Größen (Siehe dazu auch Seite 4 und das obere Bild auf Seite 5). Diese Form bietet oft Vorteile bei der Berechnung und eignet sich besonders für Fortgeschrittene. Sie dient der Vorbereitung auf das Fourier-Integral, das später besprochen wird.

2.7 Gleichungen zur Umrechnung der Fourier-Koeffizienten ($\mathbf{n > 0}$)

Gegeben ⇒	a_0	A_0	$\underline{c}_0$	$\underline{c}_0$
———	a_n	A_n	$\underline{c}_n = \underline{c}^*_{-n}$	$\lvert\underline{c}_n\rvert = \lvert\underline{c}_{-n}\rvert$
⇓ **Gesucht**	b_n	φ_n		$\Phi_n = -\Phi_{-n}$
$a_0 =$	—	A_0	$\underline{c}_0$	$\underline{c}_0$
$a_n =$	—	$A_n \cdot \sin\varphi_n$	$2 \cdot Re\{\underline{c}_n\}$	$2 \cdot \lvert\underline{c}_n\rvert \cdot \cos\,\Phi_n$
$b_n =$	—	$A_n \cdot \cos\varphi_n$	$-2 \cdot Im\{\underline{c}_n\}$	$-2 \cdot \lvert\underline{c}_n\rvert \cdot \sin\,\Phi_n$
$A_0 =$	a_0	—	$\underline{c}_0$	$\underline{c}_0$
$A_n =$	$\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$	—	$2 \cdot \lvert\underline{c}_n\rvert$	$2 \cdot \lvert\underline{c}_n\rvert$
$\varphi_n =$	$\arctan\frac{a_n}{b_n}$ **1) beachten**	—	$90^o + \arctan\frac{Im\{\underline{c}_n\}}{Re\{\underline{c}_n\}}$ **3) beachten**	$90^o + \Phi_n$
$\underline{c}_0 =$	a_0	A_0	—	$\underline{c}_0$
$\underline{c}_n = \underline{c}^*_{-n} =$	$\frac{a_n - j\,b_n}{2}$	$\frac{A_n \cdot (\sin\varphi_n - j\,\cos\varphi_n)}{2}$	—	$\lvert\underline{c}_n\rvert \cdot (\cos\,\Phi_n + j\,\sin\,\Phi_n)$
$\underline{c}_0 =$	$= a_0$	A_0	$\underline{c}_0$	—
$\lvert\underline{c}_n\rvert = \lvert\underline{c}_{-n}\rvert =$	$\frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2}$	$\frac{A_n}{2}$	$\lvert\underline{c}_n\rvert$	—
$\Phi_n = -\Phi_{-n} =$	$\arctan\frac{-b_n}{a_n}$ **2) beachten**	$\varphi_n - 90^o$	$\arctan\frac{Im\{\underline{c}_n\}}{Re\{\underline{c}_n\}}$ **3) beachten**	—

1) Falls $\mathbf{b_n < 0}$ muss der Winkel φ_n um $\pm 180^o$ korrigiert werden.

2) Falls $\mathbf{a_n < 0}$ muss der Winkel Φ_n um $\pm 180^o$ korrigiert werden.

3) Falls $\mathrm{Re}\{\underline{\mathbf{c}}_{\mathbf{n}}\} < \mathbf{0}$ muss der Winkel Φ_n um $\pm 180^o$ korrigiert werden.

Andernfalls liegen die Winkel (dem Hauptwert von arctan entsprechend) im falschen Quadranten.

2.8 Berechnung reeller Fourier-Reihen mit Integralen

Die Auswertung der folgenden Integrale setzt voraus, dass $\mathbf{f(t)}$ bzw. $\mathbf{f(x)}$ als Funktionsgleichung gegeben und Stammfunktionen der anfallenden Integrale verfügbar sind.

Andernfalls, wenn z.B. nur Stützwerte der periodischen Funktion vorliegen, verwendet man numerische Methoden, auf die später eingegangen wird. Dabei nähert man -meist mit Rechnerhilfe- die Integrale durch Summen an.

2.8.1 Berechnung der reellen Fourier-Koeffizienten

Die Fourier-Koeffizienten $\mathbf{a_0}$, $\mathbf{a_n}$, $\mathbf{b_n}$ können aus den folgenden Gleichungen durch Integration über eine Periodendauer ermittelt werden. Auf eine Herleitung der Gleichungen wird in dieser Vorlesung verzichtet.

Die untere Integrationsgrenze $\mathbf{t_0}$ kann frei gewählt werden. Oft gelingt es, durch eine günstige Wahl von $\mathbf{t_0}$ den Rechenaufwand deutlich zu reduzieren.
Die Periodendauer der Zeitfunktion ist $\mathbf{T}$.

$$\mathbf{a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,dt\,;} \quad \mathbf{a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cdot \cos(n\omega_1 t)\,dt\,;} \quad \mathbf{b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cdot \sin(n\omega_1 t)\,dt}$$

Kennt man die Fourier-Koeffizienten $\mathbf{a_0}$, $\mathbf{a_n}$, $\mathbf{b_n}$, kann mit ihnen die Zeitfunktion berechnet werden.

$$\mathbf{f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(n\omega_1 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(n\omega_1 t)}$$

In manchen Fällen ist es vorteilhaft, anstelle der Zeit $\mathbf{t}$ die Variable $\boxed{\mathbf{x = \omega_1 t}}$ als Argument der Funktion (mit der Periode $\mathbf{2\pi}$) zu verwenden.
Auch hier ist die untere Integrationsgrenze $\mathbf{x_0}$ frei wählbar.

$$\mathbf{a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{x_0}^{x_0+2\pi} f(x)\,dx\,;} \quad \mathbf{a_n = \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{x_0+2\pi} f(x) \cdot \cos(nx)\,dx\,;} \quad \mathbf{b_n = \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{x_0+2\pi} f(x) \cdot \sin(nx)\,dx}$$

Als Ergebnisse erhält man die gleichen Fourier-Koeffizienten $\mathbf{a_0}$, $\mathbf{a_n}$, $\mathbf{b_n}$ wie oben und kann mit ihnen jeden Wert der Funktion berechnen.

$$\mathbf{f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(nx)}$$

Bedeutung wichtiger Größen:

Formelzeichen	Bedeutung
$\mathbf{T = \frac{1}{f_1}}$	Periodendauer bei periodischen Zeitfunktionen $\mathbf{f(t)}$
$\mathbf{2\pi}$	Periodenintervall bei periodischen Funktionen $\mathbf{f(x)}$
$\mathbf{a_0}$, $\mathbf{A_0}$	Gleichanteil, arithmetischer Mittelwert
$\mathbf{f_1 = \frac{1}{T}}$	Grundfrequenz
$\omega_1 = \mathbf{2\pi f_1}$	Grundkreisfrequenz
$\mathbf{a_1}$, $\mathbf{b_1}$; $\mathbf{A_1}$, φ_1	Kennwerte der Grundschwingung
$\mathbf{n}$	ganze Zahl, sie bestimmt die Ordnung der Harmonischen
$\mathbf{a_n}$, $\mathbf{b_n}$; $\mathbf{A_n}$, φ_n	Kennwerte der n-ten Harmonischen

Ü 7 - 10

2.8.2 Auswirkung von Symmetrien auf die reelle Fourier-Reihe

Besitzt die periodische Funktion $\mathbf{f(t)}$ bzw. $\mathbf{f(x)}$ eine oder auch zwei der folgenden Symmetrie-Eigenschaften, vereinfacht sich die Berechnung der reellen Fourier-Koeffizienten und Teile der Koeffizienten besitzen dann den Wert Null.

Bei geraden Funktionen gilt : $\mathbf{f(t) = f(-t)}$ bzw. $\mathbf{f(x) = f(-x)}$

Der Graph von $\mathbf{f(t)}$ bzw. $\mathbf{f(x)}$ verläuft achsensymmetrisch zur y-Achse.

Das Integrationsintervall kann in diesem Fall auf eine Halbperiode reduziert werden.
Zum Ausgleich dafür werden die Ergebnisse der modifizierten Integrale doppelt gezählt.

In solchen Funktionen können keine (punktsymmetrischen) Sinus-Anteile enthalten sein.

Deshalb gilt: $\mathbf{b_n = 0}$

$$\mathbf{a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t)\,dt\,; \quad a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cdot \cos(n\omega_1 t)\,dt}$$

$$\mathbf{a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\,dx\,; \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos(nx)\,dx}$$

Bei ungeraden Funktionen gilt : $\mathbf{f(t) = -f(-t)}$ bzw. $\mathbf{f(x) = -f(-x)}$

Der Graph von $\mathbf{f(t)}$ bzw. $\mathbf{f(x)}$ verläuft punktsymmetrisch zum Ursprung.

Das Integrationsintervall kann in diesem Fall auf eine Halbperiode reduziert werden.
Zum Ausgleich dafür werden die Ergebnisse der modifizierten Integrale doppelt gezählt.

In solchen Funktionen können keine (achsensymmetrischen) Cosinus-Anteile enthalten sein.

Deshalb gilt: $\mathbf{a_0 = a_n = 0}$

$$\mathbf{b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cdot \sin(n\omega_1 t)\,dt} \qquad \mathbf{b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin(nx)\,dx}$$

Gerade Halbperioden-Symmetrie : $\mathbf{f(t + T/2) = f(t)}$ bzw. $\mathbf{f(x + \pi) = f(x)}$

Die Funktion besteht aus zwei identischen Halbperioden. Deshalb könnte diese Funktion auch modifiziert mit halbierter Periodendauer und doppelter Grundfrequenz untersucht werden.

Das Integrationsintervall kann auch in diesem Fall auf eine Halbperiode reduziert werden.
Zum Ausgleich dafür werden die Ergebnisse der modifizierten Integrale doppelt gezählt.

In solchen Funktionen können keine Harmonischen ungerader Ordnung enthalten sein.

Deshalb gilt: $\mathbf{a_n = b_n = 0}$ für $\mathbf{n = 1, 3, 5, 7, 9, \ldots}$ (ungerade)

$$\mathbf{a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t)\,dt\,; \quad a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t)\,\cos(n\omega_1 t)\,dt\,; \quad b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t)\,\sin(n\omega_1 t)\,dt}$$

$$\mathbf{a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\,dx\,; \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos(nx)\,dx\,; \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin(nx)\,dx}$$

Ungerade Halbperioden-Symmetrie : $\mathbf{f(t + T/2) = -f(t)}$ bzw. $\mathbf{f(x + \pi) = -f(x)}$

Die Teilverläufe der Halbperioden unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen.

Das Integrationsintervall kann auch in diesem Fall auf eine Halbperiode reduziert werden.
Zum Ausgleich dafür werden die Ergebnisse der modifizierten Integrale doppelt gezählt.

In solchen Funktionen können keine Oberschwingungen gerader Ordnung enthalten sein.

Deshalb gilt: $\mathbf{a_0 = 0}$; $\mathbf{a_n = b_n = 0}$ für $\mathbf{n = 2, 4, 6, 8, 10 \ldots}$ (gerade)

$$\mathbf{a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cdot \cos(n\omega_1 t)\, dt} \; ; \qquad \mathbf{b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cdot \sin(n\omega_1 t)\, dt}$$

$$\mathbf{a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos(nx)\, dx} \; ; \qquad \mathbf{b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin(nx)\, dx}$$

Funktionen mit kombinierten Symmetrieeigenschaften

Gerade oder ungerade Funktionen mit einer Halbperioden-Symmetrie

Das Integrationsintervall kann in solchen Fällen auf eine Viertelperiode reduziert werden.
Zum Ausgleich dafür werden die Ergebnisse der modifizierten Integrale vierfach gezählt.

	Bei geraden Funktionen	Bei ungeraden Funktionen
mit gerader HP- Symmetrie entfallen	$b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, \ldots$ und auch $a_1, a_3, a_5, a_7, a_9, \ldots$	$a_0,\ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \ldots$ und auch $b_1, b_3, b_5, b_7, b_9, \ldots$
mit ungerader HP- Symmetrie entfallen	$b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, \ldots$ und auch $a_0,\ a_2, a_4, a_6, a_8, \ldots$	$a_0,\ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \ldots$ und auch $b_2, b_4, b_6, b_8, \ldots$

$$\mathbf{a_0 = \frac{4}{T} \int_0^{T/4} f(t)\, dt} \; ; \quad \mathbf{a_n = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} f(t) \cos(n\omega_1 t)\, dt} \; ; \quad \mathbf{b_n = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} f(t) \sin(n\omega_1 t)\, dt}$$

$$\mathbf{a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x)\, dx} \; ; \quad \mathbf{a_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x) \cdot \cos(nx)\, dx} \; ; \quad \mathbf{b_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x) \cdot \sin(nx)\, dx}$$

Das Programm **FOURIER** gibt mit den Zeitfunktionen Nr. 1 und 2 eine anschauliche Erklärung, warum bei Signalen mit doppelten Symmetrien viele der Fourier-Koeffizienten entfallen.

Ergänzen Sie - wo es erforderlich ist - die folgenden Aussagen:

Das Produkt zweier gerader Funktionen ergibt eine gerade Funktion.

Das Produkt einer geraden und einer ungerader Funktion ergibt eine gerade Funktion.

Das Produkt zweier ungerader Funktionen ergibt eine gerade Funktion.

Der Quotient aus zwei geraden Funktionen ergibt eine gerade Funktion.

Der Quotient aus einer geraden und einer ungerader Funktion ergibt eine gerade Funktion.

Der Quotient aus zwei ungeraden Funktionen ergibt eine gerade Funktion.

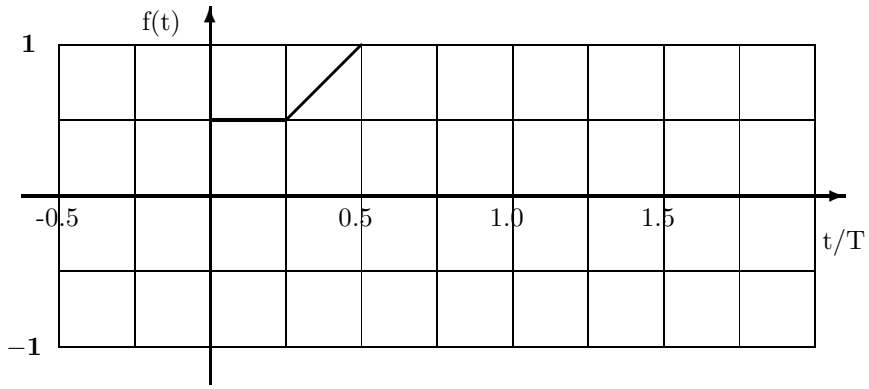
Die Summe zweier gerader Funktionen ergibt eine gerade Funktion.

Die Differenz zweier gerader Funktionen ergibt eine gerade Funktion.

Der Summe zweier ungerader Funktionen ergibt eine gerade Funktion.

Der Differenz zweier ungerader Funktionen ergibt eine gerade Funktion.

Ergänzen Sie die dargestellten Zeitfunktionen so, dass sie die angegebenen Symmetrie-Eigenschaften erhalten und vervollständigen Sie die Texte neben den Zeitverläufen.



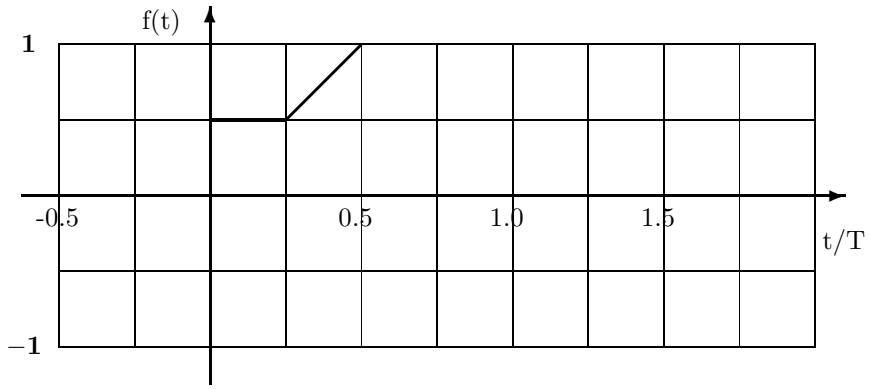
f(t) sei eine gerade Funktion

$\mathbf{a_0}$ =

Die Fourier-Reihe enthält nur

- Terme

Alle $\mathbf{a_n} = 0$



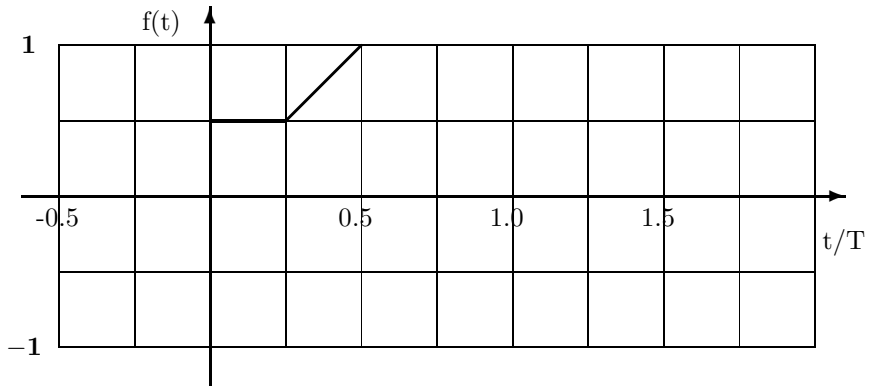
f(t) sei eine ungerade Funktion

$\mathbf{a_0}$ =

Die Fourier-Reihe enthält nur

- Terme

Alle $\mathbf{a_n} = 0$



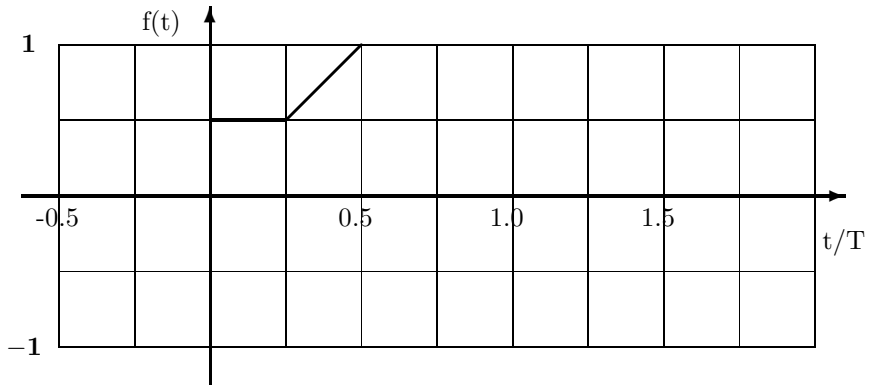
f(t) besitzt eine ungerade HP-Symm.

$\mathbf{a_0}$ =

Die Fourier-Reihe enthält nur Oberschwingungen ungerader Ordnung

Es entfallen alle $\mathbf{a_n}$, $\mathbf{b_n}$ für n = ungerade

---



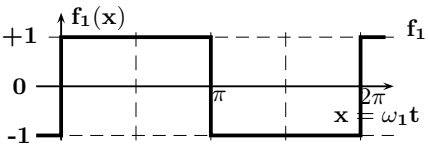
f(t) besitzt eine gerade HP-Symm.

$\mathbf{a_0}$ =

Die Fourier-Reihe enthält nur Oberschwingungen ungerader Ordnung

Es entfallen alle $\mathbf{a_n}$, $\mathbf{b_n}$ für n = ungerade

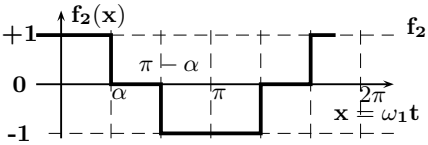
Fourier-Reihen und Effektivwerte einiger periodischer Funktionen $f(x) = f(x + 2\pi)$



$$f_1(x) = \frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin(x)}{1} + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \frac{\sin(7x)}{7} + \ldots\right]$$

Die Fkt. ist ☐ gerade ☐ ungerade
HP-Symm. ☐ gerade ☐ ungerade

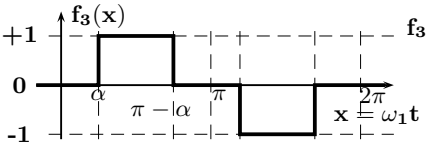
$$F_{1\,\mathrm{eff}} = 1$$



$$f_2(x) = \frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin(\alpha)\cos(x)}{1} + \frac{\sin(3\alpha)\cos(3x)}{3} + \frac{\sin(5\alpha)\cos(5x)}{5} + \ldots\right]$$

Die Fkt. ist ☐ gerade ☐ ungerade
HP-Symm. ☐ gerade ☐ ungerade

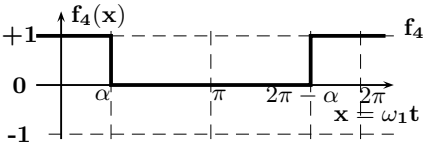
$$F_{2\,\mathrm{eff}} = \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}}$$



$$f_3(x) = \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos(\alpha)\sin(x)}{1} + \frac{\cos(3\alpha)\sin(3x)}{3} + \frac{\cos(5\alpha)\sin(5x)}{5} + \ldots\right]$$

Die Fkt. ist ☐ gerade ☐ ungerade
HP-Symm. ☐ gerade ☐ ungerade

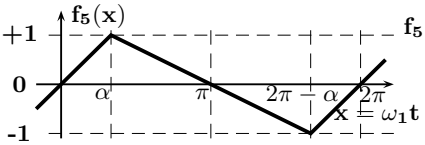
$$F_{3\,\mathrm{eff}} = \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}}$$



$$f_4(x) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\alpha}{2} + \frac{\sin(\alpha)\cos(x)}{1} + \frac{\sin(2\alpha)\cos(2x)}{2} + \frac{\sin(3\alpha)\cos(3x)}{3} + \ldots\right]$$

Die Fkt. ist ☐ gerade ☐ ungerade
HP-Symm. ☐ gerade ☐ ungerade

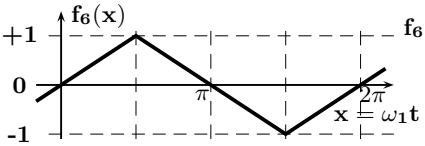
$$F_{4\,\mathrm{eff}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}$$



$$f_5(x) = \frac{2}{\alpha\pi - \alpha^2}\left[\frac{\sin(\alpha)\sin(x)}{1^2} + \frac{\sin(2\alpha)\sin(2x)}{2^2} + \frac{\sin(3\alpha)\sin(3x)}{3^2} + \ldots\right]$$

Die Fkt. ist ☐ gerade ☐ ungerade
HP-Symm. ☐ gerade ☐ ungerade

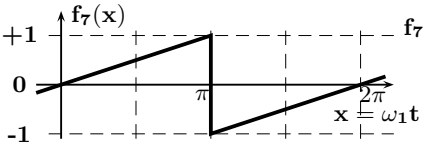
$$F_{5\,\mathrm{eff}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



$$f_6(x) = \frac{8}{\pi^2}\left[\frac{\sin(x)}{1^2} - \frac{\sin(3x)}{3^2} + \frac{\sin(5x)}{5^2} - \frac{\sin(7x)}{7^2} + - \ldots\right] = f_5(x, \alpha = \tfrac{\pi}{2})$$

Die Fkt. ist ☐ gerade ☐ ungerade
HP-Symm. ☐ gerade ☐ ungerade

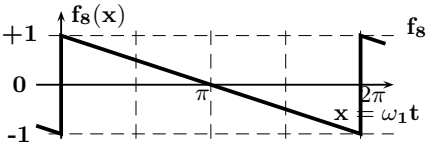
$$F_{6\,\mathrm{eff}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



$$f_7(x) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(x)}{1} - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} - \frac{\sin(4x)}{4} + - \ldots\right] = f_5(x, \alpha \to \pi)$$

Die Fkt. ist ☐ gerade ☐ ungerade
HP-Symm. ☐ gerade ☐ ungerade

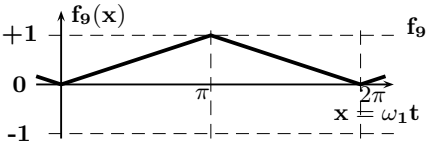
$$F_{7\,\mathrm{eff}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



$$f_8(x) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(x)}{1} + \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(4x)}{4} + \ldots\right] = f_5(x, \alpha \to 0)$$

Die Fkt. ist ☐ gerade ☐ ungerade
HP-Symm. ☐ gerade ☐ ungerade

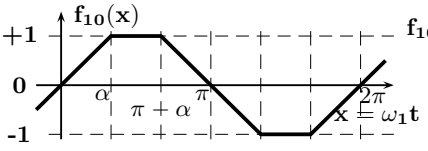
$$F_{8\,\mathrm{eff}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



$$f_9(x) = \frac{4}{\pi^2}\left[\frac{\pi^2}{8} - \frac{\cos(x)}{1^2} - \frac{\cos(3x)}{3^2} - \frac{\cos(5x)}{5^2} - \frac{\cos(7x)}{7^2} - \ldots\right]$$

Die Fkt. ist ☐ gerade ☐ ungerade
HP-Symm. ☐ gerade ☐ ungerade

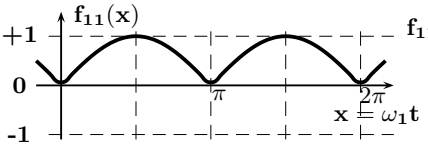
$$F_{9\,\mathrm{eff}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



$$f_{10}(x) = \frac{4}{\alpha\pi}\left[\frac{\sin(\alpha)\sin(x)}{1^2} + \frac{\sin(3\alpha)\sin(3x)}{3^2} + \frac{\sin(5\alpha)\sin(5x)}{5^2} + \ldots\right]$$

Die Fkt. ist ☐ gerade ☐ ungerade
HP-Symm. ☐ gerade ☐ ungerade

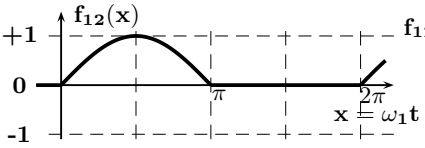
$$F_{10\,\mathrm{eff}} = \sqrt{1 - \frac{4\alpha}{3\pi}}$$



$$f_{11}(x) = \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{1\cdot 3} - \frac{\cos(4x)}{3\cdot 5} - \frac{\cos(6x)}{5\cdot 7} - \frac{\cos(8x)}{7\cdot 9} - \ldots\right]$$

Die Fkt. ist ☐ gerade ☐ ungerade
HP-Symm. ☐ gerade ☐ ungerade

$$F_{11\,\mathrm{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



$$f_{12}(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos(2x)}{1\cdot 3} + \frac{\cos(4x)}{3\cdot 5} + \frac{\cos(6x)}{5\cdot 7} + \frac{\cos(8x)}{7\cdot 9} + \ldots\right]$$

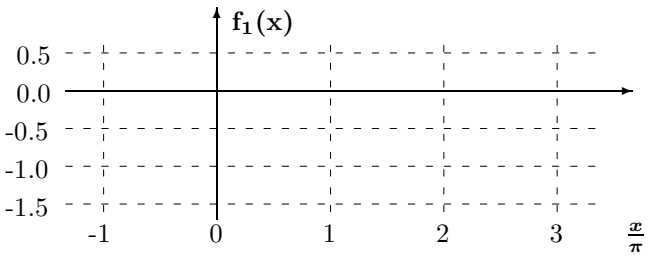
Die Fkt. ist ☐ gerade ☐ ungerade
HP-Symm. ☐ gerade ☐ ungerade

$$F_{12\,\mathrm{eff}} = \frac{1}{2}$$

Beispiele reeller, nichtsinusförmiger periodischer Funktionen:

Zeichnen Sie die Verläufe der Funktionen $\mathbf{f_1}$, $\mathbf{f_2}$, $\mathbf{f_3}$, $\mathbf{f_4}$ und $\mathbf{f_5}$ in die vorbereiteten Diagramme und kreuzen Sie jeweils alle zutreffenden Aussagen an.

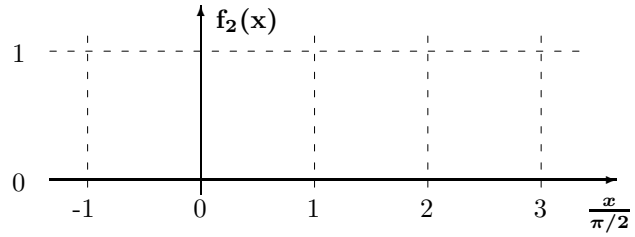
$$f_1(x) = \frac{x}{\pi} - 0.5 \qquad -\pi \le x \le \pi$$



$f_1(x)$: O ist gerade O ist ungerade O mit gerader HP-Symm. O mit ungerader HP-Symm.

In der Fourier-Reihe entfallen: O a_0 O a_n O $a_{ger.}$ O $a_{ung.}$ O b_n O $b_{ger.}$ O $b_{ung.}$

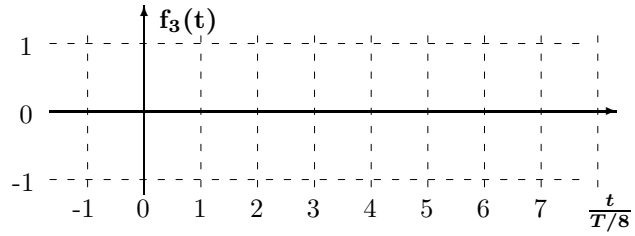
$$f_2(x) = \begin{cases} \cos x & : \; -\frac{\pi}{2} \le x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & : \; \frac{\pi}{2} \le x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$



$f_2(x)$: O ist gerade O ist ungerade O mit gerader HP-Symm. O mit ungerader HP-Symm.

In der Fourier-Reihe entfallen: O a_0 O a_n O $a_{ger.}$ O $a_{ung.}$ O b_n O $b_{ger.}$ O $b_{ung.}$

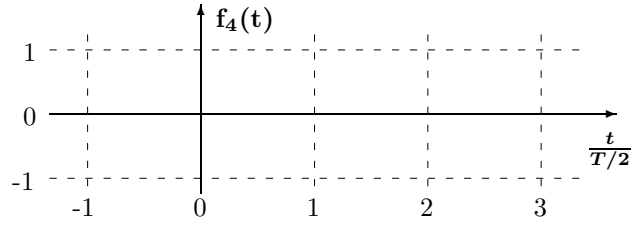
$$f_3(t) = \begin{cases} 1 & : \; -\frac{T}{8} \le t < \frac{T}{8} \\ 0 & : \; \frac{T}{8} \le t < \frac{3T}{8} \\ -1 & : \; \frac{3T}{8} \le t < \frac{5T}{8} \\ 0 & : \; \frac{5T}{8} \le t < \frac{7T}{8} \end{cases}$$



$f_3(t)$: O ist gerade O ist ungerade O mit gerader HP-Symm. O mit ungerader HP-Symm.

In der Fourier-Reihe entfallen: O a_0 O a_n O $a_{ger.}$ O $a_{ung.}$ O b_n O $b_{ger.}$ O $b_{ung.}$

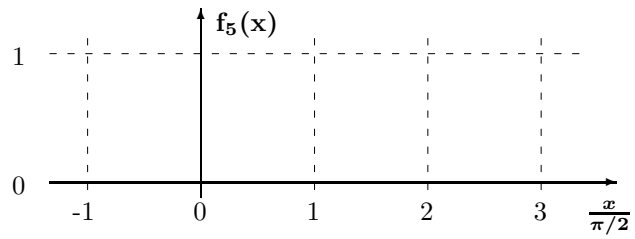
$$f_4(t) = \begin{cases} \frac{t}{T/4} & : \; -\frac{T}{4} \le t < \frac{T}{4} \\ -\frac{t}{T/4} + 2 & : \; \frac{T}{4} \le t < \frac{3T}{4} \end{cases}$$



$f_4(t)$: O ist gerade O ist ungerade O mit gerader HP-Symm. O mit ungerader HP-Symm.

In der Fourier-Reihe entfallen: O a_0 O a_n O $a_{ger.}$ O $a_{ung.}$ O b_n O $b_{ger.}$ O $b_{ung.}$

$$f_5(x) = |\cos(x)|$$

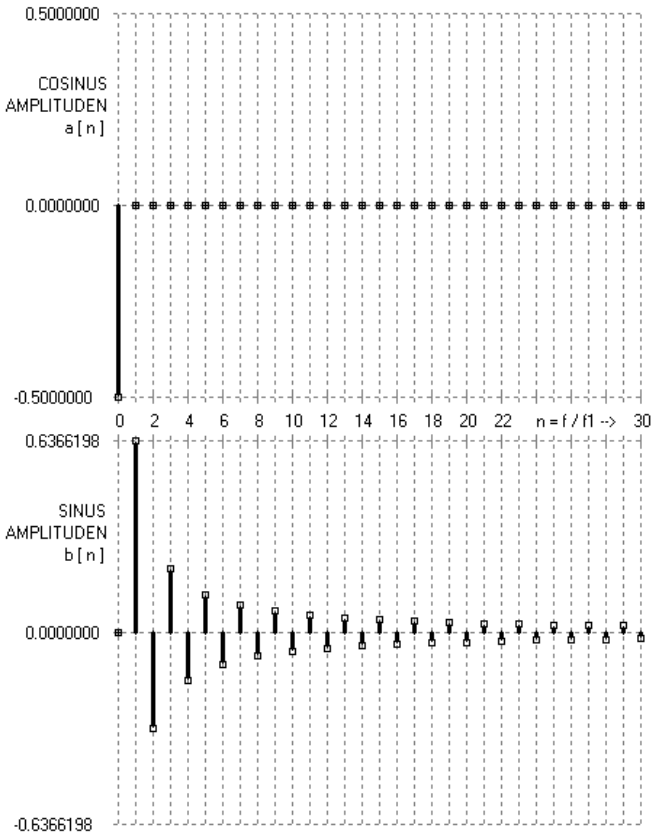


$f_5(x)$: O ist gerade O ist ungerade O mit gerader HP-Symm. O mit ungerader HP-Symm.

In der Fourier-Reihe entfallen: O a_0 O a_n O $a_{ger.}$ O $a_{ung.}$ O b_n O $b_{ger.}$ O $b_{ung.}$

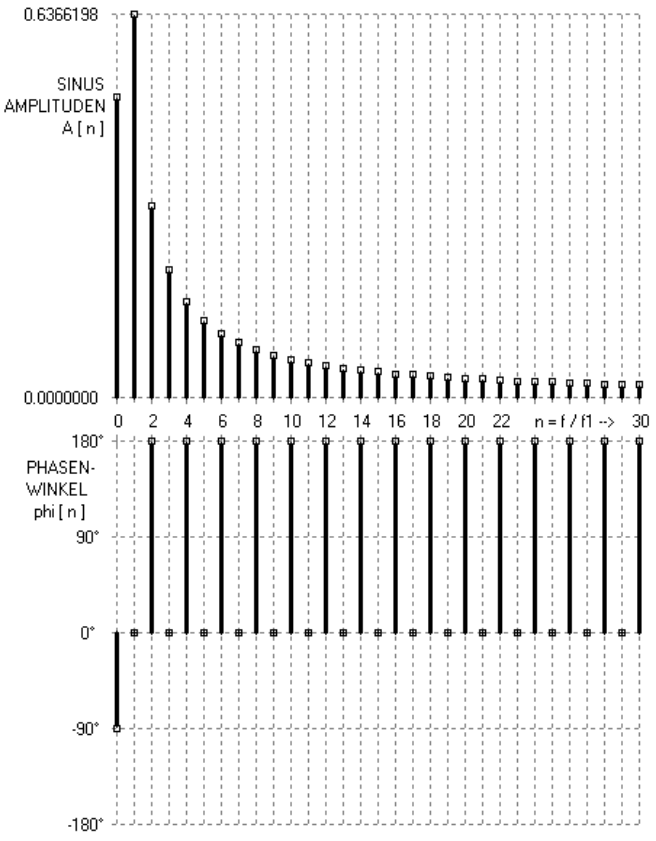
Reelle Fourier-Koeffizienten zur Sägezahn-Funktion mit Gleichanteil [$\mathbf{f_1(x)}$ auf Seite Nr. 17]

Die einseitigen Linienspektren wurden mit dem Programm **FOURIER_REIHE** berechnet.



COSINUS-TERME	SINUS-TERME
a[00] = -0.5000000	<--- GLEICHANTEIL
a[01] = 0.00	b[01] = 0.6366198
a[02] = 0.00	b[02] = -0.3183099
a[03] = 0.00	b[03] = 0.2122066
a[04] = 0.00	b[04] = -0.1591549
a[05] = 0.00	b[05] = 0.1273240
a[06] = 0.00	b[06] = -0.1061033
a[07] = 0.00	b[07] = 0.0909457
a[08] = 0.00	b[08] = -0.0795775
a[09] = 0.00	b[09] = 0.0707355
a[10] = 0.00	b[10] = -0.0636620
a[11] = 0.00	b[11] = 0.0578745
a[12] = 0.00	b[12] = -0.0530516
a[13] = 0.00	b[13] = 0.0489708
a[14] = 0.00	b[14] = -0.0454728
a[15] = 0.00	b[15] = 0.0424413
a[16] = 0.00	b[16] = -0.0397887
a[17] = 0.00	b[17] = 0.0374482
a[18] = 0.00	b[18] = -0.0353678
a[19] = 0.00	b[19] = 0.0335063
a[20] = 0.00	b[20] = -0.0318310
a[21] = 0.00	b[21] = 0.0303152
a[22] = 0.00	b[22] = -0.0289373
a[23] = 0.00	b[23] = 0.0276791
a[24] = 0.00	b[24] = -0.0265258
a[25] = 0.00	b[25] = 0.0254648
a[26] = 0.00	b[26] = -0.0244854
a[27] = 0.00	b[27] = 0.0235785
a[28] = 0.00	b[28] = -0.0227364
a[29] = 0.00	b[29] = 0.0219524
a[30] = 0.00	b[30] = -0.0212207

DARGESTELLT SIND DIE R E L L E N FOURIER-KOEFFIZIENTEN ALS SINUS- UND COSINUS-ANTEILE FÜR n = 0 30



SINUS-AMPLITUDEN	PHASENWINKEL
A[00] = 0.5000000	<--- GLEICHANTEIL
A[01] = 0.6366198	phi[01] = 0.00
A[02] = 0.3183099	phi[02] = 180.000
A[03] = 0.2122066	phi[03] = 0.00
A[04] = 0.1591549	phi[04] = 180.000
A[05] = 0.1273240	phi[05] = 0.00
A[06] = 0.1061033	phi[06] = 180.000
A[07] = 0.0909457	phi[07] = 0.00
A[08] = 0.0795775	phi[08] = 180.000
A[09] = 0.0707355	phi[09] = 0.00
A[10] = 0.0636620	phi[10] = 180.000
A[11] = 0.0578745	phi[11] = 0.00
A[12] = 0.0530516	phi[12] = 180.000
A[13] = 0.0489708	phi[13] = 0.00
A[14] = 0.0454728	phi[14] = 180.000
A[15] = 0.0424413	phi[15] = 0.00
A[16] = 0.0397887	phi[16] = 180.000
A[17] = 0.0374482	phi[17] = 0.00
A[18] = 0.0353678	phi[18] = 180.000
A[19] = 0.0335063	phi[19] = 0.00
A[20] = 0.0318310	phi[20] = 180.000
A[21] = 0.0303152	phi[21] = 0.00
A[22] = 0.0289373	phi[22] = 180.000
A[23] = 0.0276791	phi[23] = 0.00
A[24] = 0.0265258	phi[24] = 180.000
A[25] = 0.0254648	phi[25] = 0.00
A[26] = 0.0244854	phi[26] = 180.000
A[27] = 0.0235785	phi[27] = 0.00
A[28] = 0.0227364	phi[28] = 180.000
A[29] = 0.0219524	phi[29] = 0.00
A[30] = 0.0212207	phi[30] = 180.000

DARGESTELLT SIND DIE R E L L E N FOURIER-KOEFFIZIENTEN ALS SINUS-AMPLITUDEN UND PHASENWINKEL FÜR n = 0 30

2.9 Berechnung komplexer Fourier-Reihen mit Integralen

Unter Verwendung der Ergebnisse für die reellen Fourier-Koeffizienten kann man auch zu einer gleichwertigen komplexen Darstellung kommen.

Am Beispiel der reellen Fourier-Reihe der reellen Zeitfunktion $\mathbf{f(t)}$ nach Seite 12

$$\mathbf{f(t)} \;=\; \mathbf{a_0} + \sum_{\mathbf{n=1}}^{\infty} \left[\, \mathbf{a_n} \cdot \mathbf{cos(n\omega_1 t)} \;+\; \mathbf{b_n} \cdot \mathbf{sin(n\omega_1 t)} \,\right]$$

soll im Folgenden der Übergang zur komplexen Form der Fourier-Reihe vorgestellt werden.

2.9.1 Berechnung der komplexen Fourier-Koeffizienten

Aus der Eulerschen Gleichung $\mathbf{e^{j\,\alpha} = \cos\alpha + j\,\sin\alpha}$ und $\mathbf{e^{-j\,\alpha} = \cos\alpha - j\,\sin\alpha}$ erhält man durch Addition und Subtraktion $\cos\alpha = \dfrac{\mathbf{e^{j\,\alpha} + e^{-j\,\alpha}}}{\mathbf{2}}$ und $\sin\alpha = \dfrac{\mathbf{e^{j\,\alpha} - e^{-j\,\alpha}}}{\mathbf{2j}}$.

Setzt man in den soeben gefundenen Ausdrücken für Sinus und Cosinus $\alpha = \mathbf{n\omega_1 t}$ kann man diese Beziehungen in der Summe von $\mathbf{f(t)}$ einsetzen.

$$\mathbf{f(t)} \;=\; \mathbf{a_0} + \sum_{\mathbf{n=1}}^{\infty} \left[\, \mathbf{a_n} \frac{\mathbf{e^{j\,n\omega_1 t} + e^{-j\,n\omega_1 t}}}{\mathbf{2}} \;+\; \mathbf{b_n} \frac{\mathbf{e^{j\,n\omega_1 t} - e^{-j\,n\omega_1 t}}}{\mathbf{2j}} \,\right] \qquad \text{wird umgeformt in}$$

$$\mathbf{f(t)} \;=\; \mathbf{a_0} + \sum_{\mathbf{n=1}}^{\infty} \left[\left(\frac{\mathbf{a_n - j\,b_n}}{\mathbf{2}} \right) \mathbf{e^{j\,n\omega_1 t}} \;+\; \left(\frac{\mathbf{a_n + j\,b_n}}{\mathbf{2}} \right) \mathbf{e^{-j\,n\omega_1 t}} \right].$$

Vergleicht man diese Form mit der folgenden Darstellung

$$\mathbf{f(t)} \;=\; \mathbf{\underline{c}_0} + \sum_{\mathbf{n=1}}^{\infty} \left[\, \mathbf{\underline{c}_n e^{j\,n\omega_1 t}} \;+\; \mathbf{\underline{c}_{-n} e^{-j\,n\omega_1 t}} \,\right],$$

Ü 11 - 13

können die komplexen Koeffizienten $\mathbf{\underline{c}_n}$ als Funktionen der reellen Fourier-Koeffizienten $\mathbf{a_0}$, $\mathbf{a_n}$, $\mathbf{b_n}$ angegeben werden.

$$\mathbf{\underline{c}_0 = a_0}\;; \qquad \mathbf{\underline{c}_n = \frac{a_n - j\,b_n}{2}}\;; \qquad \mathbf{\underline{c}_{-n} = \underline{c}_n^{*} = \frac{a_n + j\,b_n}{2}}$$

Ersetzt man in den Gleichungen zur Berechnung der reellen Fourier-Koeffizienten auf Seite 12 die Sinus- und Cosinus-Funktionen durch die oben angegebenen komplexen Exponentialfunktionen, erhält man eine Gleichung zur einheitlichen Berechnung für alle komplexen Fourier-Koeffizienten. Auf die anschauliche Darstellung der komplexen Drehzeiger im Programm **SINUS** sei an dieser Stelle noch einmal hingewiesen.

Die Beiträge mit $\mathbf{-n}$ für $\mathbf{n = 0}$ und für $\mathbf{n}$ führen dazu, dass die Laufzahl $\mathbf{n}$ der Reihe mit den komplexen Koeffizienten folgende ganzzahligen Werte annimmt $\mathbf{-\infty < n < \infty}$.

$$\mathbf{\underline{c}_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cdot e^{-j\,n\omega_1 t}\, dt} \qquad \text{und zugehörig} \qquad \mathbf{f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{c}_n \cdot e^{j\,n\omega_1 t}}$$

$$\mathbf{\underline{c}_n = \frac{1}{2\pi} \int_{x_0}^{x_0+2\pi} f(x) \cdot e^{-j\,nx}\, dx} \qquad \text{und zugehörig} \qquad \mathbf{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{c}_n \cdot e^{j\,nx}}$$

Bei dieser Darstellung treten wie auch bereits auf Seite 4 negative (Kreis-) Frequenzen im zweiseitigen Linienspektrum der Reihe auf.

Die komplexen Größen $\mathbf{\underline{c}_n}$ lassen sich (wie oben geschehen) in kartesischer Form durch ihren Real- und Imaginärteil oder äquivalent auch in Polarform durch ihren Betrag und Winkel darstellen:

$$\mathbf{\underline{c}_0 = a_0}\;; \qquad \mathbf{\underline{c}_n = \frac{a_n}{2} - j\frac{b_n}{2}}\;; \quad \mathbf{\underline{c}_{-n} = \underline{c}_n^{*}}\;; \qquad \mathbf{\underline{c}_n = |\underline{c}_n| \cdot e^{j\,\Phi_n}} \qquad \text{für} \quad \mathbf{n > 0}$$

Gleichungen zur Umrechnung der Fourier-Koeffizienten finden Sie auf Seite 11.

2.9.2 Auswirkungen von Symmetrien auf die komplexe Fourier-Reihe

A.) UNGERADE FUNKTION (Punktsymmetrie zum Ursprung):

Alle komplexen Koeffizienten der Fourier-Reihe sind in diesem Fall rein imaginär.

Reelle Fourier-Koeffizienten: $\mathbf{a_0 = 0}$; $\mathbf{a_n = 0}$

Daraus folgt: $\mathbf{\underline{c}_0 = 0}$; $\mathbf{\underline{c}_n = \frac{a_n - jb_n}{2} = -j\frac{b_n}{2}}$; $\mathbf{\underline{c}_{-n} = \underline{c}^*_n}$

$$\mathbf{\underline{c}_n = -j \cdot \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cdot \sin(\, n\, \omega_1 t\,)\, dt} \quad ; \quad \mathbf{\underline{c}_n = -j \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin(\, nx\,)\, dx}$$

A1.) UNGERADE FUNKTION MIT UNGERADER HALBPERIODEN-SYMMETRIE:

In der komplexen Fourier-Reihe treten nur imaginäre Koeffizienten ungerader Ordnung auf.

Reelle Fourier-Koeffizienten: $\mathbf{a_0 = 0}$; $\mathbf{a_n = 0}$; $\mathbf{b_{n=ger} = 0}$

Daraus folgt : $\mathbf{\underline{c}_0 = 0}$; $\mathbf{\underline{c}_{\pm n=ger} = 0}$; $\mathbf{\underline{c}_{n=ung} = -j\frac{b_n}{2}}$; $\mathbf{\underline{c}_{-n=ung} = \underline{c}^*_{n=ung}}$

$$\mathbf{\underline{c}_{n=ung} = -j \cdot \frac{4}{T} \int_0^{T/4} f(t) \cdot \sin(\, n\, \omega_1 t\,)\, dt} \quad ; \quad \mathbf{\underline{c}_{n=ung} = -j \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x) \cdot \sin(\, nx\,)\, dx}$$

A2.) UNGERADE FUNKTION MIT GERADER HALBPERIODEN-SYMMETRIE:

In der komplexen Fourier-Reihe treten nur imaginäre Koeffizienten gerader Ordnung auf.

Reelle Fourier-Koeffizienten: $\mathbf{a_0 = 0}$; $\mathbf{a_n = 0}$; $\mathbf{b_{n=ung} = 0}$

Daraus folgt : $\mathbf{\underline{c}_0 = 0}$; $\mathbf{\underline{c}_{\pm n=ung} = 0}$; $\mathbf{\underline{c}_{n=ger} = -j\frac{b_n}{2}}$; $\mathbf{\underline{c}_{-n=ung} = \underline{c}^*_{n=ung}}$

$$\mathbf{\underline{c}_{n=ger} = -j \cdot \frac{4}{T} \int_0^{T/4} f(t) \cdot \sin(\, n\, \omega_1 t\,)\, dt} \quad ; \quad \mathbf{\underline{c}_{n=ger} = -j \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x) \cdot \sin(\, nx\,)\, dx}$$

B.) GERADE FUNKTION (Symmetrie bezüglich der y-Achse):

Die Koeffizienten der Fourier-Reihe sind in diesem Fall rein reell.

Reelle Fourier-Koeffizienten: $\mathbf{b_n = 0}$

Daraus folgt : $\mathbf{\underline{c}_0 = a_0}$; $\mathbf{\underline{c}_n = \frac{a_n - jb_n}{2} = \frac{a_n}{2}}$; $\mathbf{\underline{c}_{-n} = \underline{c}_n = \underline{c}_{\pm n}}$

$$\mathbf{\underline{c}_{\pm n} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cdot \cos(\, n\, \omega_1 t\,)\, dt} \quad ; \quad \mathbf{\underline{c}_{\pm n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos(\, nx\,)\, dx}$$

B1.) GERADE FUNKTION MIT UNGERADER HALBPERIODEN-SYMMETRIE:

In der Fourier-Reihe treten nur reelle Koeffizienten ungerader Ordnung auf.

Reelle Fourier-Koeffizienten: $\mathbf{a_0 = 0}$; $\mathbf{a_{n=ger} = 0}$; $\mathbf{b_n = 0}$

Daraus folgt : $\mathbf{\underline{c}_0 = 0}$; $\mathbf{\underline{c}_n = \frac{a_n - jb_n}{2} = \frac{a_n}{2}}$; $\mathbf{\underline{c}_{-n} = \underline{c}_n = \underline{c}_{\pm n}}$; $\mathbf{\underline{c}_{\pm n=ger} = 0}$

$$\mathbf{\underline{c}_{\pm n=ung} = \frac{4}{T} \int_0^{T/4} f(t) \cdot \cos(\, n\, \omega_1 t\,)\, dt} \quad ; \quad \mathbf{\underline{c}_{\pm n=ung} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x) \cdot \cos(\, nx\,)\, dx}$$

B2.) GERADE FUNKTION MIT GERADER HALBPERIODEN-SYMMETRIE:

In der Fourier-Reihe treten nur reelle Koeffizienten gerader Ordnung auf.

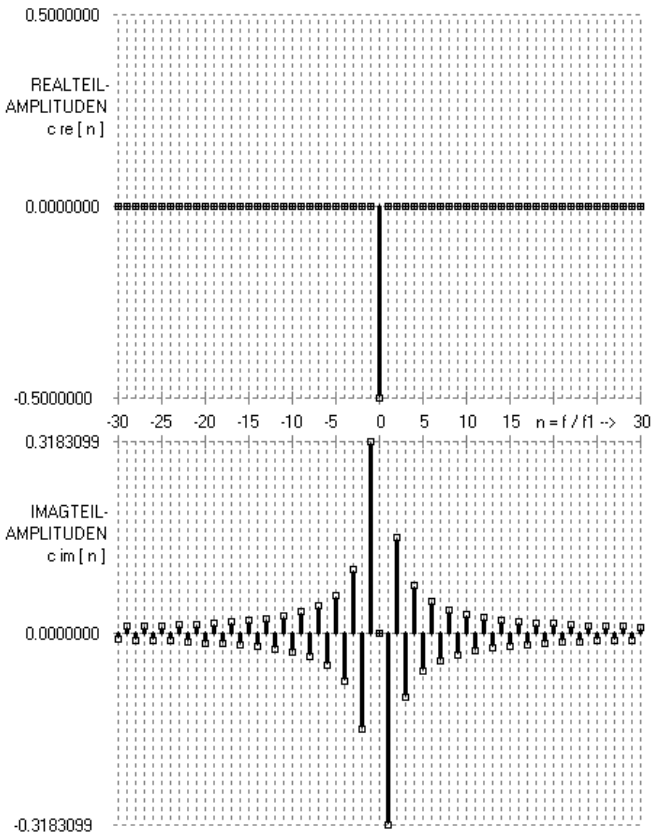
Reelle Fourier-Koeffizienten: $\mathbf{a_{n=ung} = 0}$; $\mathbf{b_n = 0}$

Daraus folgt : $\mathbf{\underline{c}_0 = a_0}$; $\mathbf{\underline{c}_n = \frac{a_n - jb_n}{2} = \frac{a_n}{2}}$; $\mathbf{\underline{c}_{-n} = \underline{c}_n = \underline{c}_{\pm n}}$; $\mathbf{\underline{c}_{\pm n=ung} = 0}$

$$\mathbf{\underline{c}_{\pm n=ger} = \frac{4}{T} \int_0^{T/4} f(t) \cdot \cos(\, n\, \omega_1 t\,)\, dt} \quad ; \quad \mathbf{\underline{c}_{\pm n=ger} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x) \cdot \cos(\, nx\,)\, dx}$$

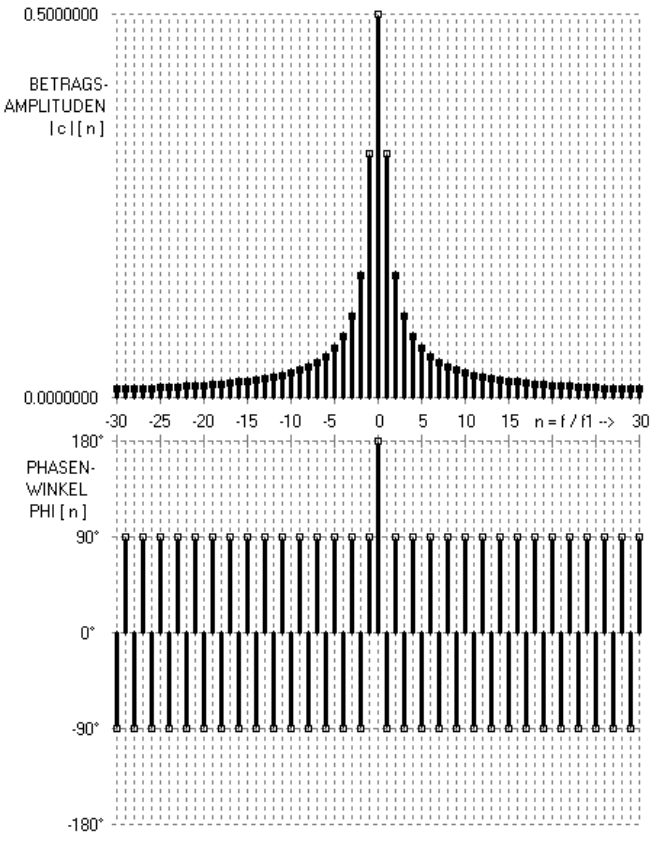
Komplexe Fourier-Koeffizienten zur Sägezahn-Funktion mit Gleichanteil [$\mathbf{f_1(x)}$ auf Seite 17]

Die zweiseitigen Linienspektren wurden mit dem Programm **FOURIER_REIHE** berechnet.



REALTEILE	IMAGINÄRTEILE
c re [-15] = 0.00	c im [-15] = 0.0212207
c re [-14] = 0.00	c im [-14] = -0.0227364
c re [-13] = 0.00	c im [-13] = 0.0244854
c re [-12] = 0.00	c im [-12] = -0.0265258
c re [-11] = 0.00	c im [-11] = 0.0289373
c re [-10] = 0.00	c im [-10] = -0.0318310
c re [-09] = 0.00	c im [-09] = 0.0353678
c re [-08] = 0.00	c im [-08] = -0.0397887
c re [-07] = 0.00	c im [-07] = 0.0454728
c re [-06] = 0.00	c im [-06] = -0.0530516
c re [-05] = 0.00	c im [-05] = 0.0636620
c re [-04] = 0.00	c im [-04] = -0.0795775
c re [-03] = 0.00	c im [-03] = 0.1061033
c re [-02] = 0.00	c im [-02] = -0.1591549
c re [-01] = 0.00	c im [-01] = 0.3183099
c re [+00] = -0.5000000	<--- GLEICHANTEIL
c re [+01] = 0.00	c im [+01] = -0.3183099
c re [+02] = 0.00	c im [+02] = 0.1591549
c re [+03] = 0.00	c im [+03] = -0.1061033
c re [+04] = 0.00	c im [+04] = 0.0795775
c re [+05] = 0.00	c im [+05] = -0.0636620
c re [+06] = 0.00	c im [+06] = 0.0530516
c re [+07] = 0.00	c im [+07] = -0.0454728
c re [+08] = 0.00	c im [+08] = 0.0397887
c re [+09] = 0.00	c im [+09] = -0.0353678
c re [+10] = 0.00	c im [+10] = 0.0318310
c re [+11] = 0.00	c im [+11] = -0.0289373
c re [+12] = 0.00	c im [+12] = 0.0265258
c re [+13] = 0.00	c im [+13] = -0.0244854
c re [+14] = 0.00	c im [+14] = 0.0227364
c re [+15] = 0.00	c im [+15] = -0.0212207

DARGESTELLT SIND DIE K O M P L E X E N FOURIER-KOEFFIZIENTEN NACH REAL- UND IMAGINÄRTEIL FÜR n = -30 ... 30



| c | BETRÄGE	PHASENWINKEL
| c | [-15] = 0.0212207	PHI [-15] = 90.000
| c | [-14] = 0.0227364	PHI [-14] = -90.000
| c | [-13] = 0.0244854	PHI [-13] = 90.000
| c | [-12] = 0.0265258	PHI [-12] = -90.000
| c | [-11] = 0.0289373	PHI [-11] = 90.000
| c | [-10] = 0.0318310	PHI [-10] = -90.000
| c | [-09] = 0.0353678	PHI [-09] = 90.000
| c | [-08] = 0.0397887	PHI [-08] = -90.000
| c | [-07] = 0.0454728	PHI [-07] = 90.000
| c | [-06] = 0.0530516	PHI [-06] = -90.000
| c | [-05] = 0.0636620	PHI [-05] = 90.000
| c | [-04] = 0.0795775	PHI [-04] = -90.000
| c | [-03] = 0.1061033	PHI [-03] = 90.000
| c | [-02] = 0.1591549	PHI [-02] = -90.000
| c | [-01] = 0.3183099	PHI [-01] = 90.000
| c | [+00] = 0.5000000	<--- GLEICHANTEIL
| c | [+01] = 0.3183099	PHI [+01] = -90.000
| c | [+02] = 0.1591549	PHI [+02] = 90.000
| c | [+03] = 0.1061033	PHI [+03] = -90.000
| c | [+04] = 0.0795775	PHI [+04] = 90.000
| c | [+05] = 0.0636620	PHI [+05] = -90.000
| c | [+06] = 0.0530516	PHI [+06] = 90.000
| c | [+07] = 0.0454728	PHI [+07] = -90.000
| c | [+08] = 0.0397887	PHI [+08] = 90.000
| c | [+09] = 0.0353678	PHI [+09] = -90.000
| c | [+10] = 0.0318310	PHI [+10] = 90.000
| c | [+11] = 0.0289373	PHI [+11] = -90.000
| c | [+12] = 0.0265258	PHI [+12] = 90.000
| c | [+13] = 0.0244854	PHI [+13] = -90.000
| c | [+14] = 0.0227364	PHI [+14] = 90.000
| c | [+15] = 0.0212207	PHI [+15] = -90.000

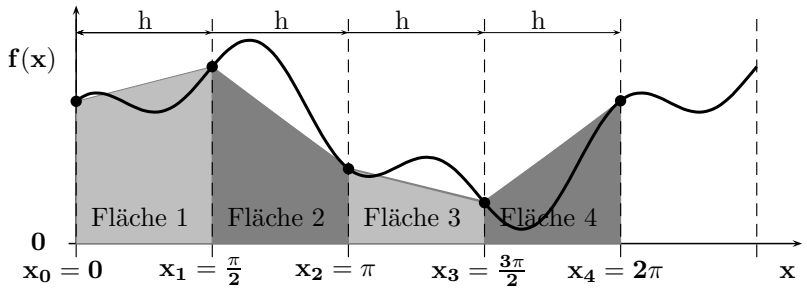
DARGESTELLT SIND DIE K O M P L E X E N FOURIER-KOEFFIZIENTEN NACH BETRAG UND PHASENWINKEL FÜR n = -30 ... 30

2.10 Die Diskrete Fourier-Transformation [DFT]

Lassen sich keine Stammfunktionen zu den Integralen bei der Berechnung der Fourier-Koeffizienten angeben oder liegt die periodische Funktion $\mathbf{f(x)}$ nur als Messkurve oder als Wertetabelle vor, verwendet man die DFT. Man ersetzt bei diesem wichtigen Rechenverfahren alle Integrale durch Summen und kann damit Näherungswerte für die Fourier-Koeffizienten berechnen.

Dazu wird das Periodenintervall $\mathbf{0 \le x < 2\pi}$ in $\mathbf{N}$ Streifen der Breite $\mathbf{h = \frac{2\pi}{N}}$ unterteilt. Aus den Funktionswerten $\mathbf{f(x_i)}$ an den äquidistanten Stützstellen $\mathbf{x_i = i \cdot h = i \cdot \frac{2\pi}{N}}$ werden Näherungswerte für die Integrale ermittelt. Für die Laufzahl $\mathbf{i}$ gilt $\mathbf{0 \le i \le N-1}$.

Nach der TRAPEZREGEL gilt als Näherung für die Fläche unter der Kurve $\mathbf{f(x)}$ für $\mathbf{N = 4}$:



$$\int_{x=x_0}^{x_N} \mathbf{f(x)\,dx} \approx \mathbf{\frac{h}{2}\,[\,f(x_0)+f(x_1)\;+\;f(x_1)+f(x_2)\;+\;f(x_2)+f(x_3)\;+\;f(x_3)+f(x_N)\,]}$$

$$\int_{x=x_0}^{x_N} \mathbf{f(x)\,dx} \approx \mathbf{\frac{h}{2}\left[\,f(x_0)+2\sum_{i=1}^{N-1} f(x_i)\;+\;f(x_N)\,\right] = Fläche\ 1 + Fläche\ 2 + Fläche\ 3 + Fläche\ 4}$$

Damit erhält man aus der Gleichung für die Fourier-Koeffizienten $\mathbf{a_n = \frac{1}{\pi}\int_{x=0}^{2\pi} f(x)\cdot\cos(nx)\,dx}$

dann $\mathbf{a_n \approx \widetilde{a}_n = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{N}\left[\,f(x_0)\cdot\cos(nx_0)\;+\;2\sum_{i=1}^{N-1} f(x_i)\cdot\cos(nx_i)\;+\;f(x_N)\cdot\cos(nx_N)\,\right]}$.

Wegen der Periodizität von $\mathbf{f(x)}$ sind die beiden Beiträge in den eckigen Klammern außerhalb des Summenzeichens gleich groß, sodass eine Zusammenfassung mit der Summe möglich ist.

Durch analoge Herleitungen findet man auch für die Fourier-Koeffizienten $\mathbf{a_0}$ bzw. $\mathbf{b_n}$ die zugehörigen Summen zur Berechnung der angenäherten Koeffizienten $\mathbf{\widetilde{a}_0}$ und $\mathbf{\widetilde{b}_n}$.

Der Rechenaufwand ist bei großem $\mathbf{N}$ wegen der vielen Sinus- und Cosinus-Aufrufe erheblich.

$$\boxed{\mathbf{\widetilde{a}_0 = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} f(x_i)}} \qquad \boxed{\mathbf{\widetilde{a}_n = \frac{2}{N}\sum_{i=0}^{N-1} f(x_i)\cdot\cos(nx_i)\;;\quad \widetilde{b}_n = \frac{2}{N}\sum_{i=0}^{N-1} f(x_i)\cdot\sin(nx_i)\;;\ n = 1,2,3,\ldots}}$$

Aus $\mathbf{N}$ Stützwerten lassen sich maximal $\mathbf{N}$ angenäherte Fourier-Koeffizienten berechnen.

Zur Verfügung stehen abhängig von $\mathbf{N}$ jedoch grundsätzlich nur die Kennwerte der folgenden Cosinus- und Sinus-Anteile:

<u>$\mathbf{N}$ = gerade :</u>

$$\mathbf{\widetilde{a}_0,\ \begin{matrix}\widetilde{a}_1, & \widetilde{a}_2, & \widetilde{a}_3, & \widetilde{a}_4, & \ldots\\ \widetilde{b}_1, & \widetilde{b}_2, & \widetilde{b}_3, & \widetilde{b}_4, & \ldots\end{matrix}\ \widetilde{a}_{N/2}}$$

<u>$\mathbf{N}$ = ungerade :</u>

$$\mathbf{\widetilde{a}_0,\ \begin{matrix}\widetilde{a}_1, & \widetilde{a}_2, & \widetilde{a}_3, & \widetilde{a}_4, & \ldots & \widetilde{a}_{(N-1)/2}\\ \widetilde{b}_1, & \widetilde{b}_2, & \widetilde{b}_3, & \widetilde{b}_4, & \ldots & \widetilde{b}_{(N-1)/2}\end{matrix}}$$

Verwendet man alle $\mathbf{N}$ Koeffizienten, wird das Fourier-Polynom $\mathbf{\widetilde{f}(x)}$ zum Interpolationspolynom von $\mathbf{f(x)}$ und nimmt an den Stützstellen $\mathbf{x_i}$ exakt die vorgegebenen Funktionswerte $\mathbf{f(x_i)}$ (bei Sprungstellen den arithmetischen Mittelwert von rechts- und linksseitigem Grenzwert, siehe dazu Seite 7) an.

<u>$\mathbf{N}$ = gerade :</u> $\mathbf{\widetilde{f}(x) \;=\; \widetilde{a}_0 \;+\; \sum_{n=1}^{(N-2)/2}\left[\,\widetilde{a}_n\cdot\cos(nx)+\widetilde{b}_n\cdot\sin(nx)\,\right] \;+\; \frac{\widetilde{a}_{N/2}}{2}\cos(\frac{N}{2}x)}$

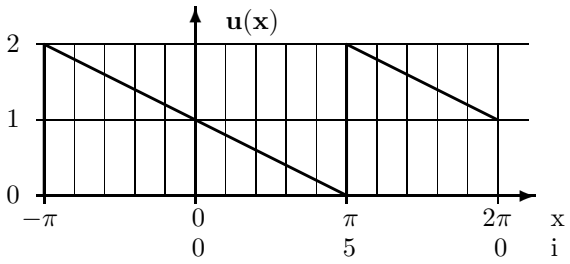
<u>$\mathbf{N}$ = ungerade :</u> $\mathbf{\widetilde{f}(x) \;=\; \widetilde{a}_0 \;+\; \sum_{n=1}^{(N-1)/2}\left[\,\widetilde{a}_n\cdot\cos(nx)+\widetilde{b}_n\cdot\sin(nx)\,\right]}$

Ein Beispiel soll das Vorgehen bei der Berechnung angenäherter Fourier-Koeffizienten eines periodischen, reellen Signals $\mathbf{u(x)}$ mit Hilfe der **DISKRETEN FOURIER – TRANSFORMATION** (**DFT**) verdeutlichen, bei der an Stelle von Integralen Summen nach Seite 22 ausgewertet werden.

Zu berechnen sind die angenäherten Fourier-Koeffizienten $\widetilde{\mathbf{a}}_\mathbf{0}$; $\widetilde{\mathbf{b}}_\mathbf{1}$; und $\widetilde{\mathbf{b}}_\mathbf{2}$.

Das Signal $\mathbf{u(x)}$ besitzt folgende Symmetrien:

Welche Koeffizienten können bei $\mathbf{N = 10}$ Stützstellen in einer Periode berechnet werden?



Welcher Wert ist an der Sprungstelle für $\mathbf{u(x)}$ einzusetzen? $\mathbf{u(x = \pm\pi)} =$ _____.

Zur Berechnung verwendet man vorteilhaft eine Tabelle z.B. nach dem folgenden Muster.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	0	0.2π	0.4π	0.6π	0.8π	π	1.2π	1.4π	1.6π	1.8π
$x_i/^\circ$	0	36	72	108	144	180	216	252	288	324
$\sin(x_i)$	0.0000	0.5878	0.9511	0.9511	0.5878	0.0000	-0.5878	-0.9511	-0.9511	-0.5878
$\sin(2x_i)$	0.0000	0.9511	0.5878	-0.5878	-0.9511	0.0000	0.9511	0.5878	-0.5878	-0.9511
$u(x_i)$										

$$\widetilde{\mathbf{a}}_\mathbf{0} = \tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{N}} \sum_{\mathbf{i=0}}^{\mathbf{N-1}} \mathbf{f(x_i)} = \tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}}[\mathbf{1 + 0.8 + 0.6 + 0.4 + 0.2 + 1.0 + 1.8 + 1.6 + 1.4 + 1.2}] = \underline{\mathbf{1.0000}}$$

$$\widetilde{\mathbf{b}}_\mathbf{1} = \tfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{N}} \sum_{\mathbf{i=0}}^{\mathbf{N-1}} \mathbf{f(x_i) \cdot \sin(1 \cdot x_i)} = \tfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{10}}[\mathbf{1 \cdot 0 + 0.8 \cdot 0.5878 + 0.6 \cdot 0.9511 + 0.4 \cdot 0.95511 + 0.2 \cdot 0.5878 +}$$
$$\mathbf{+1 \cdot 0 + 1.8 \cdot (-0.9511) + 1.6 \cdot (-0.9511) + 1.4 \cdot (-0.9511) + 1.2 \cdot (-0.5878)}] = \underline{\mathbf{-0.6156}}$$

$$\widetilde{\mathbf{b}}_\mathbf{2} = \tfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{N}} \sum_{\mathbf{i=0}}^{\mathbf{N-1}} \mathbf{f(x_i) \cdot \sin(2 \cdot x_i)} = \tfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{10}}[\mathbf{1 \cdot 0 + 0.8 \cdot 0.9511 + 0.6 \cdot 0.5878 + 0.4 \cdot (-0.5878) +}$$
$$\mathbf{+0.2 \cdot (-0.9511) + 1 \cdot 0 + 1.8 \cdot 0.9511 + 1.6 \cdot 0.5878 + 1.4 \cdot (-0.5878) + 1.2 \cdot (-0.9511)}] = \underline{\mathbf{0.2753}}$$

Beim Betrachten der Tabelle fällt auf, dass sich viele Werte als Folge der Periodizität von sin(x) und sin(2x) systematisch wiederholen. Diese Erkenntnis kann dazu verwendet werden, die nötige Rechenzeit für die **DFT** zu reduzieren. Die **FFT** (Fast Fourier Transform), nützt alle Rechenvorteile aus und erlaubt deshalb speziell bei großen Werten von **N** im Vergleich zur **DFT** eine sehr schnelle Berechnung der angenäherten Fourier-Koeffizienten periodischer Funktionen.

Untersucht man die relativen Fehler ε der numerisch bestimmten Fourier-Koeffizienten $\widetilde{\mathbf{b}}_\mathbf{1}$, $\widetilde{\mathbf{b}}_\mathbf{2}$ im Vergleich zu den exakten Werten $\mathbf{b_1}$, $\mathbf{b_2}$, zeigt sich eine starke Abhängigkeit von der Zahl der Stützstellen **N** . Tendenziell werden die Koeffizienten für die höheren Harmonischen ungenauer bestimmt, da nur wenige Stützstellen in deren Periodenintervall fallen.

	$\mathbf{b_1}$	$\widetilde{\mathbf{b}}_\mathbf{1}$	ε_1	$\mathbf{b_2}$	$\widetilde{\mathbf{b}}_\mathbf{2}$	ε_2
N = 10	-0.6366	-0.6156	-3.312 %	0.3183	0.2753	-13.519 %
N = 32	-0.6366	-0.6346	-0.321 %	0.3183	0.3142	-1.288 %

Ü 14

Festigen Sie Ihr Verständnis auch mit dem Programm **DFT** das für eine Anzahl von Signalen auch die zugehörigen Teilschwingungen darstellen kann.

Verwendet man bei einer Funktion alle berechenbaren angenäherten Fourier-Koeffizienten, erreicht man eine ideale Interpolation aller Stützstellen.

2.11 Wichtige Kenngrößen periodischer nichtsinusförmiger Signale

In diesem Abschnitt werden einige Kenngrößen eingeführt, die zur Charakterisierung von verzerrten, periodischen Signalen geeignet sind. Stellvertretend für alle denkbaren Signale werden die Definitionen am Beispiel der Spannung behandelt.

2.11.1 Arithmetischer Mittelwert ($\bar{U} = \overline{u(t)}$)

Er entspricht den Fourier-Koeffizienten $\mathbf{a_0 = A_0 = \underline{c}_0}$ und wird durch einen Balken über dem Formelzeichen markiert. Diese Größe wird allgemein Gleichanteil oder bei Spannungen bzw. Strömen auch Gleichspannungs- bzw. Gleichstrommittelwert genannt.

$$\bar{U} = \overline{u(t)} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} u(t)\,dt \qquad \text{bzw.} \qquad \bar{U} = \overline{u(x)} = \frac{1}{2\pi}\int_{x_0}^{x_0+2\pi} u(x)\,dx$$

Meist ist es möglich, diesen Wert direkt ohne Integral durch Flächenbetrachtungen zu ermitteln.

2.11.2 Effektivwert ($U = U_{eff}$, RMS : $\widehat{=}$ root mean square value)

Er kann rechnerisch aus der Zeitfunktion $u(t)$ bzw. $u(x)$ mit der Gleichung

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} u^2(t)\,dt} \qquad \text{bzw.} \qquad U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{x_0}^{x_0+2\pi} u^2(x)\,dx}$$

oder aus den Fourier-Koeffizienten A_0 ($\widehat{=}$ Gleichanteil), A_1, A_2, A_3, ... ermittelt werden.

$$U_{eff} = \sqrt{A_0^2 + \left[\frac{A_1}{\sqrt{2}}\right]^2 + \left[\frac{A_2}{\sqrt{2}}\right]^2 + \left[\frac{A_3}{\sqrt{2}}\right]^2 + \ldots} = \sqrt{\bar{U}^2 + U_{1\,eff}^2 + U_{2\,eff}^2 + U_{3\,eff}^2 + \ldots}$$

Da die Fourier-Koeffizienten A_1, A_2, A_3, ... die Spitzenwerte der sinusförmig verlaufenden Schwingungen kennzeichnen, geht man zweckmäßig auf deren Effektivwerte $U_{1\,eff} = \frac{A_1}{\sqrt{2}}$ für die Grundschwingung und $U_{n\,eff} = \frac{A_n}{\sqrt{2}}$ für die n-te Oberschwingung über.

Zum Effektivwert tragen (soweit im Signal vorhanden) der Gleichanteil, die Grundschwingung und auch alle Oberschwingungen bei.

Mit geeigneten elektronischen Wandlern gelingt auch die relativ genaue Messung des 'echten Effektivwertes' (TRMS), der auch bei nichtsinusförmigen Spannungen und Strömen zutrifft. Diese Anzeige bieten heute viele der digital anzeigenden Multimeter.

Mit speziellen Bausteinen können solche Messungen auch bis zu sehr hohen Frequenzen durchgeführt werden (AD 8361: Genauigkeit ± 0.25 dB im Frequenzbereich $0 \le f \le 2.5\text{GHz}$).

Beispiele unter Bezug auf Seite 16:

1. Ermitteln Sie den arithmetischen Mittelwert $\bar{U}_1$ und den Effektivwert $U_{1\,eff}$ der unipolaren Spannung $u_1(x) = 4\,V + 3\,V \cdot f_1(x)$. Skizzieren Sie zuerst den Verlauf von $u_1(x)$.

2. Berechnen Sie den Effektivwert $U_{2\,eff}$ der bipolaren Spannung $u_2(x) = 1\,V \cdot f_5(x)$ und ermitteln Sie welchen Einfluss die Variation $0 < \alpha \le \pi$ auf das Ergebnis hat. Skizzieren Sie auch hier zuerst den Verlauf von $u_2(x)$.

2.11.3 Formfaktor δ

Als Formfaktor eines Signals bezeichnet man den Quotienten aus dem Effektivwert und dem arithmetischem Mittelwert des Betrages, der auch 'Gleichrichtwert' genannt wird.

$$\delta = \frac{U_{eff}}{\overline{|u(t)|}} = \frac{\sqrt{\overline{|u^2(t)|}}}{\overline{|u(t)|}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt}}{\frac{1}{T}\int_0^T |u(t)|dt}$$

2.11.4 Klirrfaktor k und Grundschwingungsgehalt g

Definitionen: $\mathbf{k} = \dfrac{\text{Effektivwert aller Oberschwingungen}}{\text{Effektivwert des Wechselsignals}}$; $\mathbf{g = \sqrt{1 - k^2}}$

$$\mathbf{k} = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} U_{n\,eff}^2}}{\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} U_{n\,eff}^2}} = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} U_{n\,eff}^2}}{\sqrt{U_{eff}^2 - \bar{U}^2}} = \frac{\sqrt{U_{eff}^2 - \bar{U}^2 - U_{1\,eff}^2}}{\sqrt{U_{eff}^2 - \bar{U}^2}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} [\,u(t) - \bar{U} - u_1(t)\,]^2\,dt}}{\sqrt{U_{eff}^2 - \bar{U}^2}}$$

$U_{1\,eff}$ und $u_1(t)$ beziehen sich auf die Grundschwingung.

ACHTUNG: Im Nenner ist nur das Wechselsignal (ohne Gleichanteil) zu berücksichtigen!

Am Wert von $\mathbf{k}$ kann man die Abweichung eines Signals von der Sinusform (mit $\mathbf{k = 0}$) ablesen. Welcher Zeitverlauf führt zu einem Klirrfaktor $\mathbf{k \to 100\ \%}$?

Durch geeignete Schaltungskonzepte erreicht man heute im Audio-Bereich Klirrfaktoren $\mathbf{k \le 0.1\%}$.

Gelegentlich wird auch der Klirrfaktor $\mathbf{k_n}$ für die n-te Oberschwingung angegeben:

$$\mathbf{k_n = \frac{U_{n\,eff}}{\sqrt{U_{eff}^2 - \bar{U}^2}}}$$

Manchmal verwendet man auch die Klirrdämpfung $\mathbf{a_k}$, die in Dezibel (dB) angegeben wird:

$$\mathbf{a_k = 20\ dB \cdot \log_{10}(\tfrac{1}{k}) = -20\ dB \cdot \log_{10}(k)}$$

Ein vor allem in den USA (und in PSPICE) gebräuchliches Maß für Verzerrungen wird **Total Harmonic Distortion (THD)** genannt. Beachten Sie die vom Klirrfaktor abweichende Definition.

$$\mathbf{THD} = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} U_{n\,eff}^2}}{U_{1\,eff}}$$

Berechnet man für ein Signal beide Kennwerte, gilt die Relation **THD** **k**

Berechnen Sie die Werte von $\mathbf{k}$, $\mathbf{g}$, $\mathbf{a_k}$, **THD** zu $\mathbf{f_1(x)}$ auf Seite 17 und zu $\mathbf{f_6(x)}$ auf Seite 16.

2.11.5 Scheitelfaktor (crest factor) σ

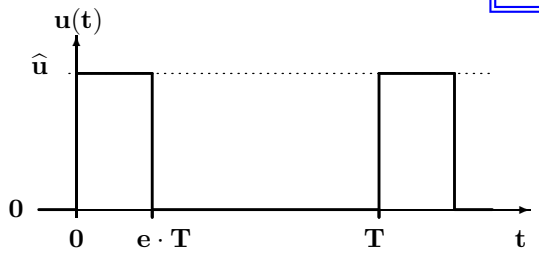
Definition: $\sigma = \dfrac{\text{Scheitelwert}}{\text{Effektivwert}} = \dfrac{\hat{u}}{U_{eff}}$

1. Beispiel: Sinusförmige Spannung $\mathbf{u(t) = \hat{u} \cdot \sin \omega t}$; $\sigma =$ ——— =

2. Beispiel: Unipolarer Rechteckpuls (Einschaltdauer $\mathbf{t_{ein} = e \cdot T}$)

Ü 15 - 20

$$\mathbf{U_{eff}} = \sqrt{\tfrac{1}{T}\int_{0}^{eT} \hat{u}^2\,dt} = \sqrt{\tfrac{1}{T}\hat{u}^2 \cdot e \cdot T} = \hat{u}\sqrt{e}$$



$\sigma =$ ——— = ———

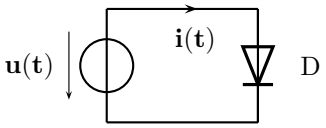
Bei einer kurzen Einschaltdauer (**e** klein) ergibt sich ein großer Scheitelfaktor σ .

Beispiel: Für $\mathbf{T = 100\ \mu s}$, $\mathbf{e = 0.01}$, $\mathbf{\hat{u} = 10\ V}$ erhält man $\mathbf{U_{eff} = 1\ V}$, $\sigma = \mathbf{10}$.

Bei TRMS-Messgeräten ist neben der Anzeigegenauigkeit der zulässige Wert von σ das wichtigste Qualitätskriterium. Dieser Wert bestimmt die erforderlichen Aussteuerbereiche der nichtlinearen Wandler zum Quadrieren und Wurzelziehen bei der Ermittlung des 'echten' Effektivwertes.

2.12 Leistungen bei nichtlinearen Verbrauchern

Im allgemeinen Fall liegt eine nichtsinusförmige periodische Spannung $\mathbf{u(t)}$ mit der Grundkreisfrequenz ω_1 an einem nichtlinearen Bauelement (z. B. wie im Bild dargestellt an einer Halbleiterdiode D) und bewirkt einen Strom $\mathbf{i(t)}$ der ebenfalls nichtsinusförmig und periodisch verläuft und dieselbe Grundkreisfrequenz ω_1 besitzt.



$$\mathbf{u(t) = U_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \hat{u}_\nu \cdot \sin(\nu\omega_1 t + \varphi_{u\nu})} \quad (1) \qquad \mathbf{i(t) = I_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} \hat{i}_\mu \cdot \sin(\mu\omega_1 t + \varphi_{i\mu})} \quad (2)$$

2.12.1 Der allgemeine Fall: Spannung und Strom nichtsinusförmig

Zunächst werden die Gleichungen für den allgemeinen Fall betrachtet, wobei auf eine ausführliche Herleitung verzichtet wird.

Die Scheinleistung S [Einheit **VA**] wird immer aus dem Produkt der Effektivwerte von Spannung und Strom ermittelt. Sie erfasst alle Frequenzkomponenten und besitzt deshalb auch den größten Zahlenwert aller Leistungen.

$$\boxed{\mathbf{S = U_{eff} \cdot I_{eff} = \sqrt{U_0^2 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\frac{\hat{u}_\nu}{\sqrt{2}}\right]^2} \cdot \sqrt{I_0^2 + \sum_{\mu=1}^{\infty} \left[\frac{\hat{i}_\mu}{\sqrt{2}}\right]^2}}}$$

Die Wirkleistung P [Einheit **W**] lässt sich unabhängig von den Kurvenformen bei Spannung und Strom im Zeitbereich berechnen.

$$\mathbf{P = \overline{p(t)} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} u(t) \cdot i(t)\, dt}$$

Die Integration über eine Periode des Produktes von $\mathbf{u(t)}$ nach Gl. (1) und $\mathbf{i(t)}$ nach Gl. (2) ergibt wegen der Orthogonalität der Sinus- und Cosinus-Funktionen nur dann von Null verschiedene Beiträge, wenn Spannung und Strom gleichfrequent sind.

$$\boxed{\mathbf{P = U_0 \cdot I_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{u_\nu}{\sqrt{2}} \cdot \frac{i_\nu}{\sqrt{2}} \cdot \cos(\varphi_{u\,\nu} - \varphi_{i\,\nu}) = U_0 \cdot I_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} U_{\nu\,eff} \cdot I_{\nu\,eff} \cdot \cos(\varphi_{u\,\nu} - \varphi_{i\,\nu})}}$$

Im Unterschied zu den sinusförmigen Vorgängen im zweiten Semester (wo neben S und P nur noch die [Feld-] Blindleistung Q auftreten konnte) muss man hier den Begriff der 'Blindleistung' allgemeiner formulieren, da nun in der Scheinleistung auch Produkte von Spannungs- und Stromanteilen mit verschiedenen Frequenzen auftreten können.
Als **Blindleistung Q** [Einheit **var**] bezeichnet man alle Leistungsbeiträge, die keine Wirkleistung ergeben. Darin enthalten sind sowohl die aus dem zweiten Semester bekannte Feldblindleistung $\mathbf{Q_F}$ als auch die so genannte Verzerrungsblindleistung $\mathbf{Q_D}$. Die Ursache für diese Beiträge sind Signalverzerrung d.h. voneinander abweichende Kurvenformen von Spannung und Strom.

$$\boxed{\mathbf{Q = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{Q_F^2 + Q_D^2}}}$$

Die Trennung der Blindleistung in Feld- und Verzerrungsblindleistung ist nicht immer eindeutig möglich und wird deshalb hier nicht weiter betrachtet.

2.12.2 Spezialfall: Sinusförmige Spannung an einem nichtlinearen Verbraucher

Beim Betrieb eines nichtlinearen Verbrauchers an der sinusförmigen (Netz-) Spannung $\mathbf{u(t)}$ nach Gl. (3) fließt ein Strom nach Gl. (4).

$$\mathbf{u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_u)} \quad (3) \qquad \mathbf{i(t) = I_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} \hat{i}_\mu \cdot \sin(\mu\omega_1 t + \varphi_{i\mu})} \quad (4)$$

Die Scheinleistung S [Einheit **VA**] wird auch in diesem Fall aus dem Produkt der Effektivwerte von Spannung und Strom ermittelt. Sie erfasst alle Frequenzkomponenten des Stroms und besitzt deshalb auch im vorliegenden Fall den größten Zahlenwert aller Leistungen.

$$\boxed{\mathbf{S = U_{eff} \cdot I_{eff} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\left[I_0^2 + \sum_{\mu=1}^{\infty} \left[\frac{\hat{i}_\mu}{\sqrt{2}}\right]^2\right]}}}$$

Die Wirkleistung P [Einheit **W**] ergibt sich hier (da gleichfrequente Anteile von Spannung und Strom nur bei der Grundfrequenz auftreten) aus der folgenden Gleichung.

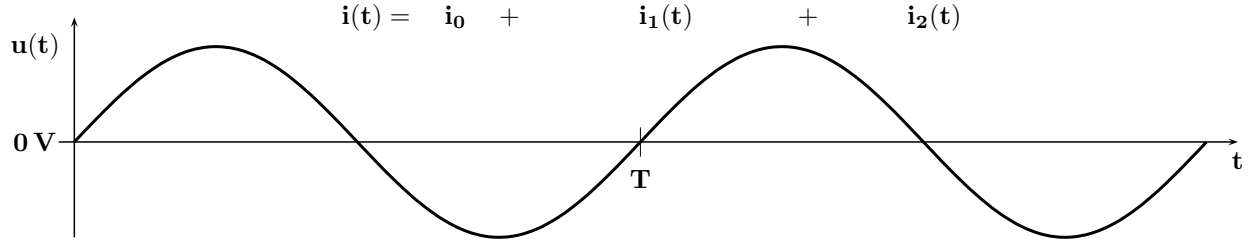
$$\boxed{\mathbf{P = \overline{s(t)} = \overline{s_1(t)} = \overline{u(t) \cdot i(t)} = U_{eff} \cdot I_{1\,eff} \cdot \cos(\varphi_u - \varphi_{i\,1})}}$$

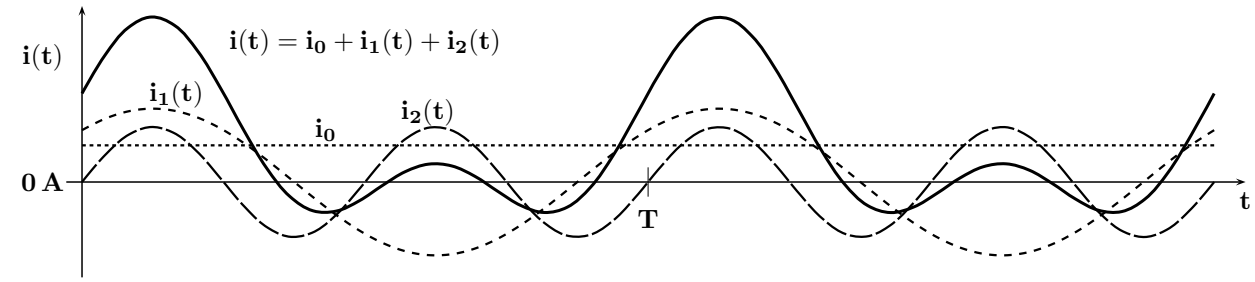
Ein Beispiel soll die Bedeutung dieser Gleichung zur Berechnung der Wirkleistung erläutern.

Spannung sinusförmig : $\mathbf{u(t) = 100\,V \cdot \sin(\omega t)}$

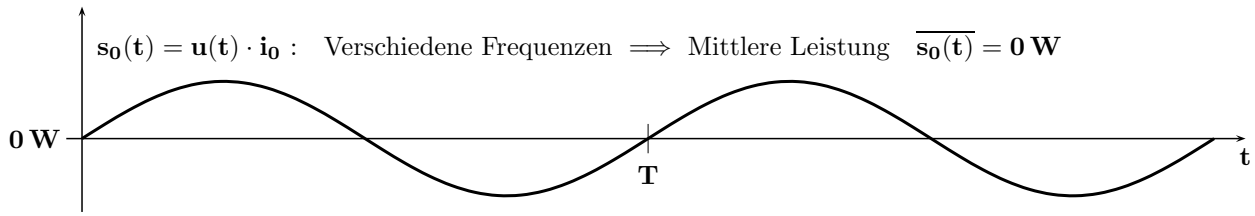
Strom nicht sinusförmig : $\mathbf{i(t) = \underbrace{10\,mA}_{i_0} + \underbrace{20\,mA \cdot \sin(\omega t + 45°)}_{i_1(t)} + \underbrace{15\,mA \cdot \sin(2\omega t)}_{i_2(t)}}$

$\mathbf{i(t) = i_0 + i_1(t) + i_2(t)}$



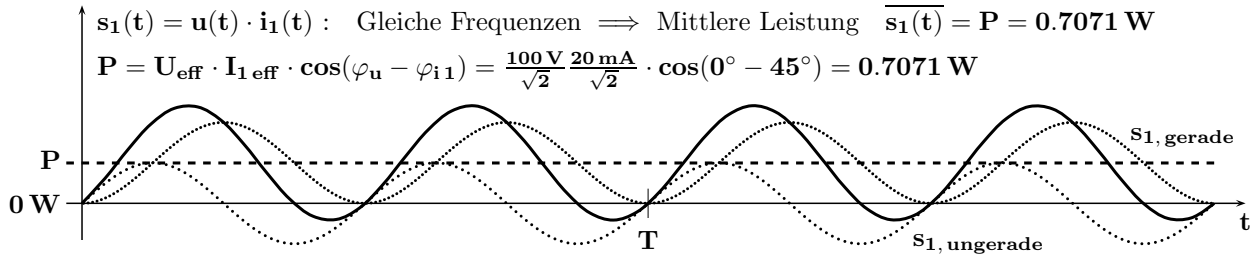


$\mathbf{s_0(t) = u(t) \cdot i_0}$: Verschiedene Frequenzen $\Longrightarrow$ Mittlere Leistung $\mathbf{\overline{s_0(t)} = 0\,W}$

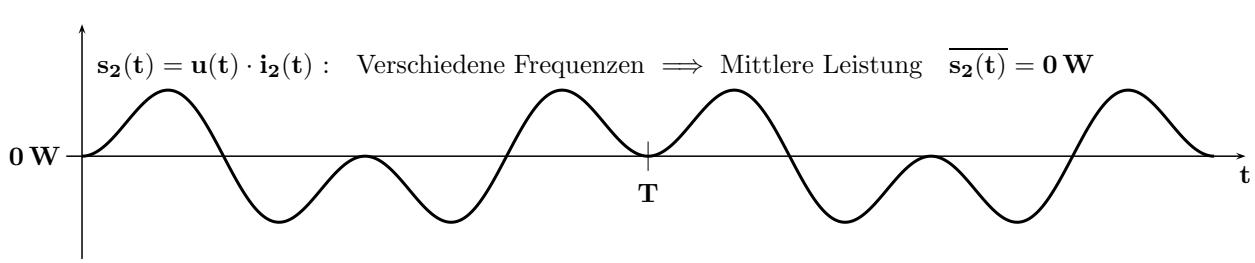


$\mathbf{s_1(t) = u(t) \cdot i_1(t)}$: Gleiche Frequenzen $\Longrightarrow$ Mittlere Leistung $\mathbf{\overline{s_1(t)} = P = 0.7071\,W}$

$\mathbf{P = U_{eff} \cdot I_{1\,eff} \cdot \cos(\varphi_u - \varphi_{i\,1}) = \frac{100\,V}{\sqrt{2}} \frac{20\,mA}{\sqrt{2}} \cdot \cos(0° - 45°) = 0.7071\,W}$

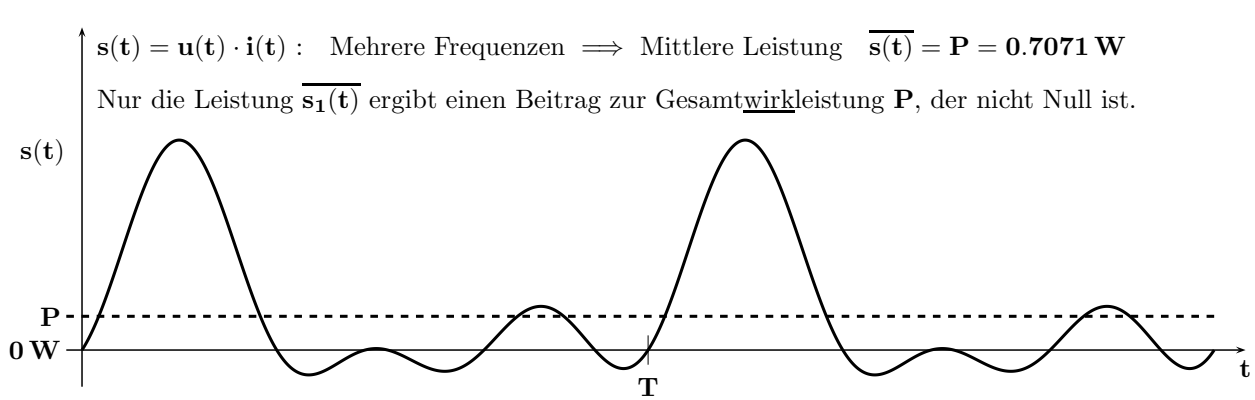


$\mathbf{s_2(t) = u(t) \cdot i_2(t)}$: Verschiedene Frequenzen $\Longrightarrow$ Mittlere Leistung $\mathbf{\overline{s_2(t)} = 0\,W}$



$\mathbf{s(t) = u(t) \cdot i(t)}$: Mehrere Frequenzen $\Longrightarrow$ Mittlere Leistung $\mathbf{\overline{s(t)} = P = 0.7071\,W}$

Nur die Leistung $\mathbf{\overline{s_1(t)}}$ ergibt einen Beitrag zur Gesamtwirkleistung **P**, der nicht Null ist.



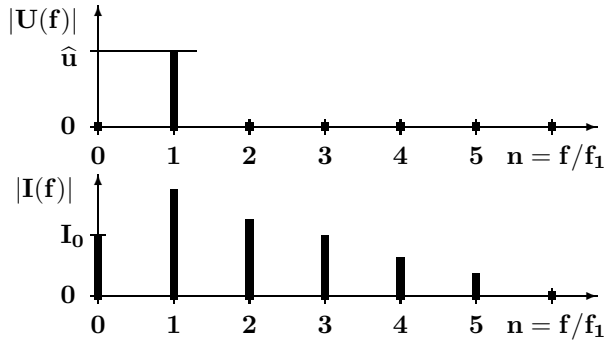
Zuordnung der Spektralkomponenten des Stroms zu den verschiedenen Leistungen, die beim Betrieb eines nichtlinearen Verbrauchers an sinusförmiger Spannung auftreten

Spannung : $\mathbf{u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_u)}$

$\mathbf{U_{eff} = \dfrac{\hat{u}}{\sqrt{2}}}$

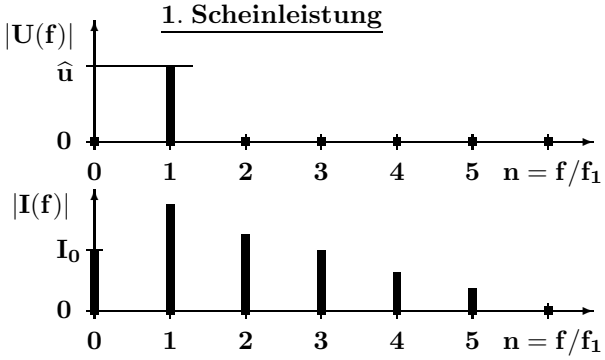
Strom : $\mathbf{i(t) = I_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \hat{i}_\nu \cdot \sin(\nu\omega_1 t + \varphi_{i\,\nu})}$

$\mathbf{I_{eff} = \sqrt{I_0^2 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\frac{\hat{i}_\nu}{\sqrt{2}}\right]^2} = \sqrt{I_0^2 + \sum_{\nu=1}^{\infty} I_{\nu\,eff}^2}}$



---

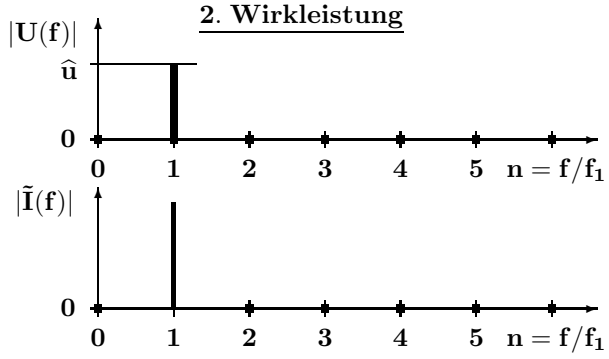
1. Scheinleistung



Über den Effektivwert $\mathbf{I_{eff}}$ tragen alle Spektralanteile des Stroms zur Scheinleistung bei.

$$\boxed{\mathbf{S = U_{eff} \cdot I_{eff}}}$$

2. Wirkleistung



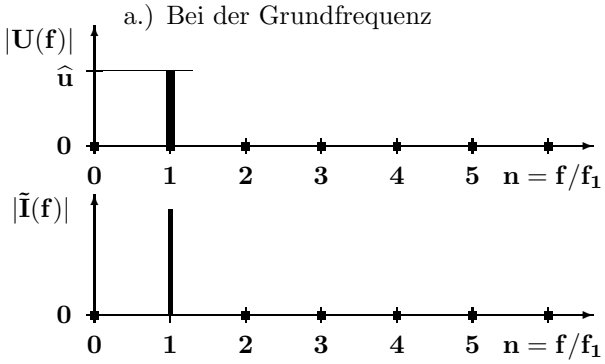
Wirkleistung entsteht nur durch gleichfrequente Anteile von Spannung und Strom.

$$\boxed{\mathbf{P = P_1 = U_{eff} \cdot I_{1\,eff} \cdot \cos(\varphi_u - \varphi_{i1})}}$$

---

3. Blindleistung

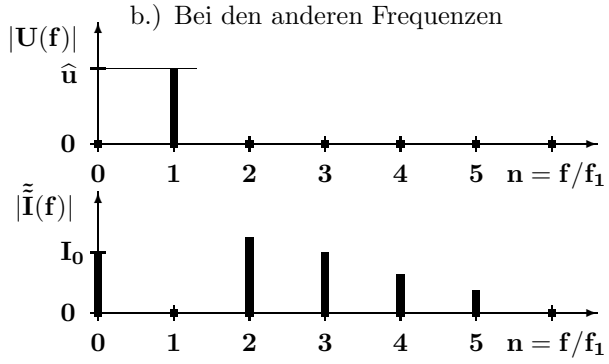
a.) Bei der Grundfrequenz



Dieser Anteil kann durch Blindelemente (dann liegt Feldblindleistung vor) oder auch durch die Verzerrung des Stromverlaufs (dann handelt es sich um Verzerrungsblindleistung) entstehen.

$$\boxed{\mathbf{Q_1 = U_{eff} \cdot I_{1\,eff} \cdot \sin(\varphi_u - \varphi_{i1})}}$$

b.) Bei den anderen Frequenzen



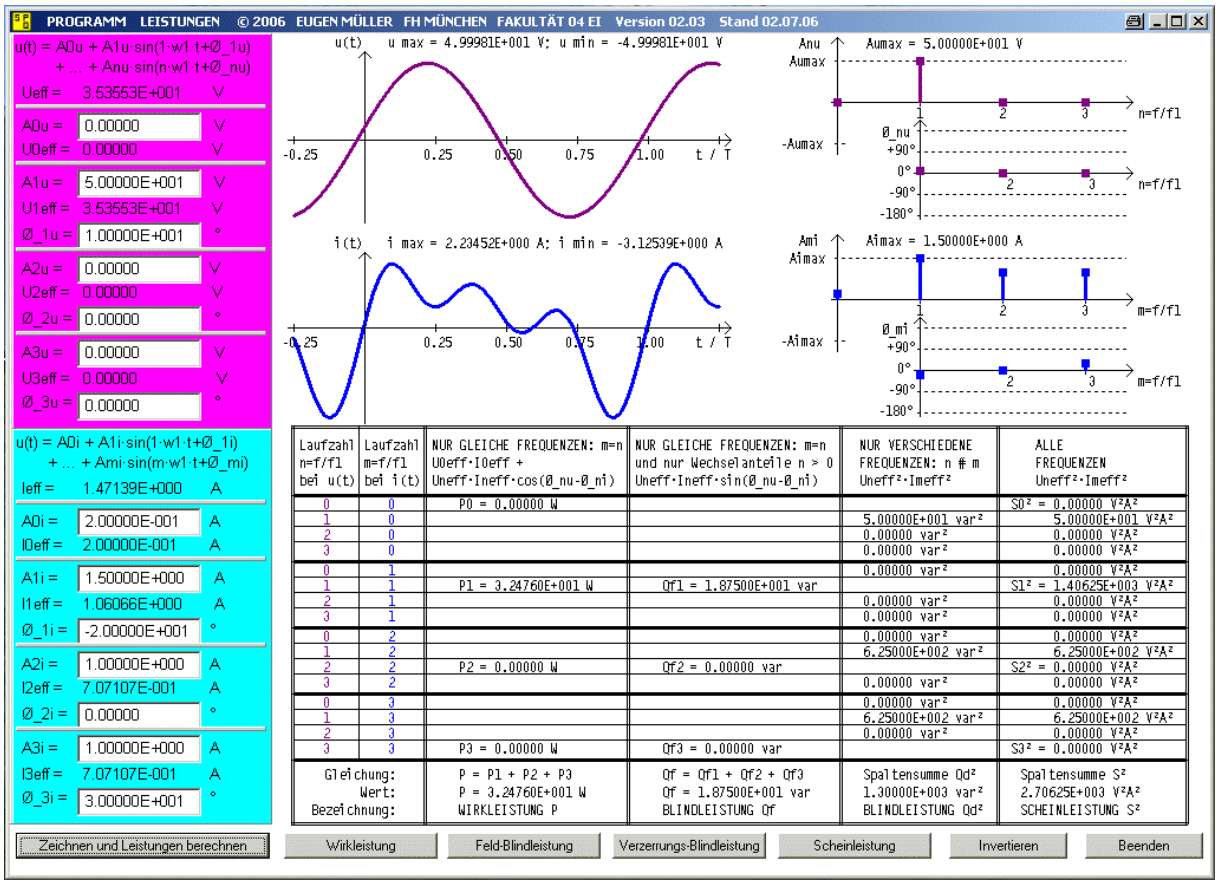
Diese Beiträge entstehen nur durch verschiedenfrequente Anteile von Spannung und Strom: Verzerrungsblindleistung.

$$\boxed{\mathbf{Q_{Rest} = U_{eff} \cdot \sqrt{I_{eff}^2 - I_{1\,eff}^2}}}$$

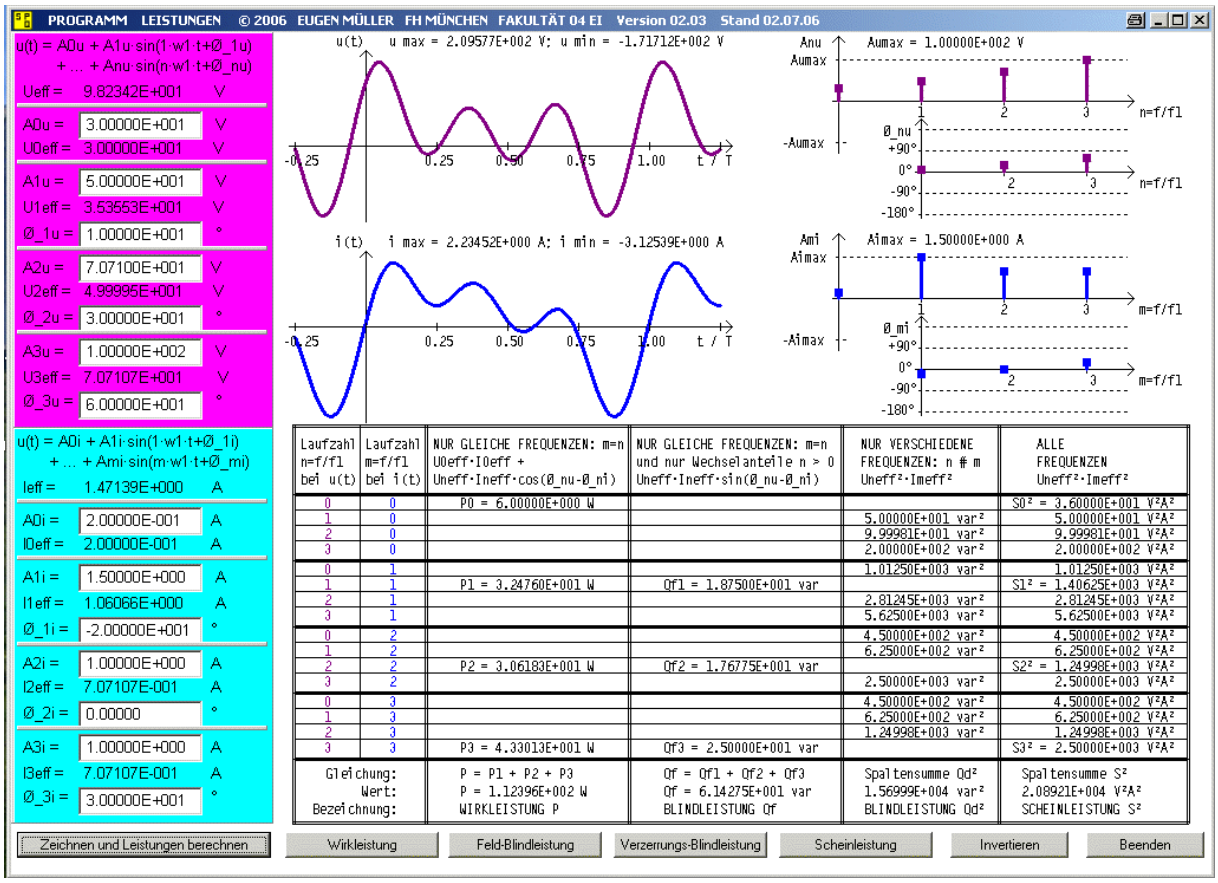
c.) Gesamte Blindleistung (Feld- und Verzerrungsblindleistung sind hier zusammengefasst!)

$$\boxed{\mathbf{Q = \sqrt{Q_1^2 + Q_{Rest}^2} = \sqrt{S^2 - P^2}}}$$

Die folgenden zwei Beispiele wurden mit dem Programm **LEISTUNGEN** berechnet.



Im ersten Beispiel zu dem behandelten Spezialfall liegt eine sinusförmige Spannung vor.



Das zweite Beispiel zeigt den allgemeinen Fall: Spannung und Strom sind nichtsinusförmig.

2.13 Die Wirkung nichtlinearer Kennlinien auf sinusförmige Signale

Wirkt eine elektrische sinusförmige Signalgröße $\mathbf{i(t)}$ bzw. $\mathbf{u(t)}$ auf ein Bauelement mit einer nichtlinearen Kennlinie (z.B. Diode, FET, Bipolartransistor), entsteht ein verzerrtes Ausgangssignal $\mathbf{u(t)}$ bzw. $\mathbf{i(t)}$.

Bei vielen elektrotechnischen Anwendungen (z.B. bei Verstärkern) ist es erforderlich, nichtlineare Verzerrungen durch schaltungstechnische Maßnahmen (Gegenkopplung mit dem Ziel einer Linearisierung der Kennlinie) sehr klein zu halten, damit die Information (z.B. Sprache oder Musik) nahezu unverzerrt d.h. mit $\mathbf{k \le 0.1\%}$ wiedergegeben werden kann.

Andere wichtige technische Aufgabenstellungen können dagegen nur durch die Anwesenheit nichtlinearer Kennlinien gelöst werden: Gleichrichtung, Modulation, Demodulation.

Ist die statische Kennlinie nur als Graph gegeben, kann der Signalverlauf der Ausgangsgröße punktweise konstruiert (siehe dazu zwei Beispiele auf der nächsten Seite) und daraus die Fourier-Reihe mit der DFT näherungsweise berechnet werden.

Ist die Gleichung der Kennlinie bekannt, lässt sich das Linienspektrum wie im folgenden Beispiel durch Einsetzen der Spannungs-Zeitfunktion in die Kennliniengleichung direkt berechnen.

2.13.1 Polynom-Kennlinie $\mathbf{i(u) = \sum c_n \cdot u^n}$

Die Spannung $\mathbf{u(t)}$ besteht aus einer Gleichspannung $\mathbf{U_0}$ zur Einstellung des gewünschten Arbeitspunktes auf der Kennlinie und einem (co-) sinusförmigen Signal. Die statische Kennlinie ist in der Form $\mathbf{i(u)}$ als Polynom zweiter Ordnung gegeben. Für die weiteren Betrachtungen gilt in diesem Beispiel:

$$\boxed{\mathbf{u(t) = U_0 + \hat{u} \cdot \cos(\omega_1 t)}} \qquad \boxed{\mathbf{i(u) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu \cdot u^\nu = c_0 + c_1 \cdot u + c_2 \cdot u^2}}$$

Durch die gekrümmte Kennlinie wird die Zeitfunktion des Stroms von der Sinusform abweichen. Die folgende Berechnung zeigt, welche Harmonischen der Grundfrequenz ω_1 der Strom enthält.

$$\mathbf{i(t) = c_0 + c_1 u(t) + c_2 u^2(t) = c_0 + c_1 \cdot (U_0 + \hat{u} \cdot \cos(\omega_1 t)) + c_2 \cdot (U_0 + \hat{u} \cdot \cos(\omega_1 t))^2}$$

$$\mathbf{i(t) = c_0 + c_1 U_0 + c_1 \hat{u} \cdot \cos(\omega_1 t) + c_2 U_0^2 + 2 c_2 U_0 \hat{u} \cdot \cos(\omega_1 t) + c_2 \hat{u}^2 \cdot \cos^2(\omega_1 t)}$$

Mit der Beziehung $\mathbf{\cos^2(\omega_1 t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\omega_1 t)}$ erhält man nach dem Sortieren folgende Gleichung und kann die enthaltenen Frequenzkomponenten ablesen:

$$\mathbf{i(t) = \underbrace{c_0 + c_1 U_0 + c_2 U_0^2 + \frac{1}{2} c_2 \hat{u}^2}} + \mathbf{\underbrace{(c_1 \hat{u} + 2 c_2 U_0 \hat{u}) \cdot \cos(\omega_1 t)}} + \mathbf{\underbrace{\frac{1}{2} c_2 \hat{u}^2 \cdot \cos(2\omega_1 t)}}$$

$$\mathbf{i(t) = \qquad I_0 \qquad + \qquad \hat{I}_1 \cdot \cos(\omega_1 t) \qquad + \qquad \hat{I}_2 \cdot \cos(2\omega_1 t)}$$

Ü 21 - 24

- Den Gleichanteil $\mathbf{I_0 = c_0 + c_1 U_0 + c_2 U_0^2 + \frac{1}{2} c_2 \hat{u}^2}$
- Den Wechselstrom mit der Grundfrequenz ω_1 und der Amplitude $\mathbf{\hat{I}_1 = c_1 \hat{u} + 2 c_2 U_0 \hat{u}}$
- Den Wechselstrom mit der doppelten Grundfrequenz $2\omega_1$ und der Amplitude $\mathbf{\hat{I}_2 = \frac{1}{2} c_2 \hat{u}^2}$

Durch den quadratischen Term in der Kennliniengleichung, der z.B. in der $\mathbf{I_D(U_{GS})}$ **– Kennlinie eines FET** anzutreffen ist, entsteht hier (neben einem Beitrag zum Gleichanteil $\mathbf{I_0}$) auch die doppelte Grundfrequenz. Ihre Amplitude wird durch die Krümmung der Kennlinie (d.h. proportional zur zweiten Ableitung) $\mathbf{c_2}$ und durch die Amplitude des Wechselsignals $\mathbf{\hat{u}}$ bestimmt.

Mit Hilfe der Formelsammlung kann man sich überzeugen, dass beim Potenzieren einer Sinus- oder Cosinusfunktion $\mathbf{\sin^n(\omega_1 t)}$ oder $\mathbf{\cos^n(\omega_1 t)}$ neben anderen Frequenzen immer auch die n- te Harmonische $\mathbf{\sin(n\omega_1 t)}$ oder $\mathbf{\cos(n\omega_1 t)}$ entsteht.

$$\mathbf{\sin^2 x = \frac{1}{2}[1 - \cos(2x)]\ ; \quad \sin^3 x = \frac{1}{4}[3\sin x - \sin(3x)]\ ; \quad \sin^4 x = \frac{1}{8}[3 - 4\cos(2x) + \cos(4x)]\ ; \ \ldots}$$

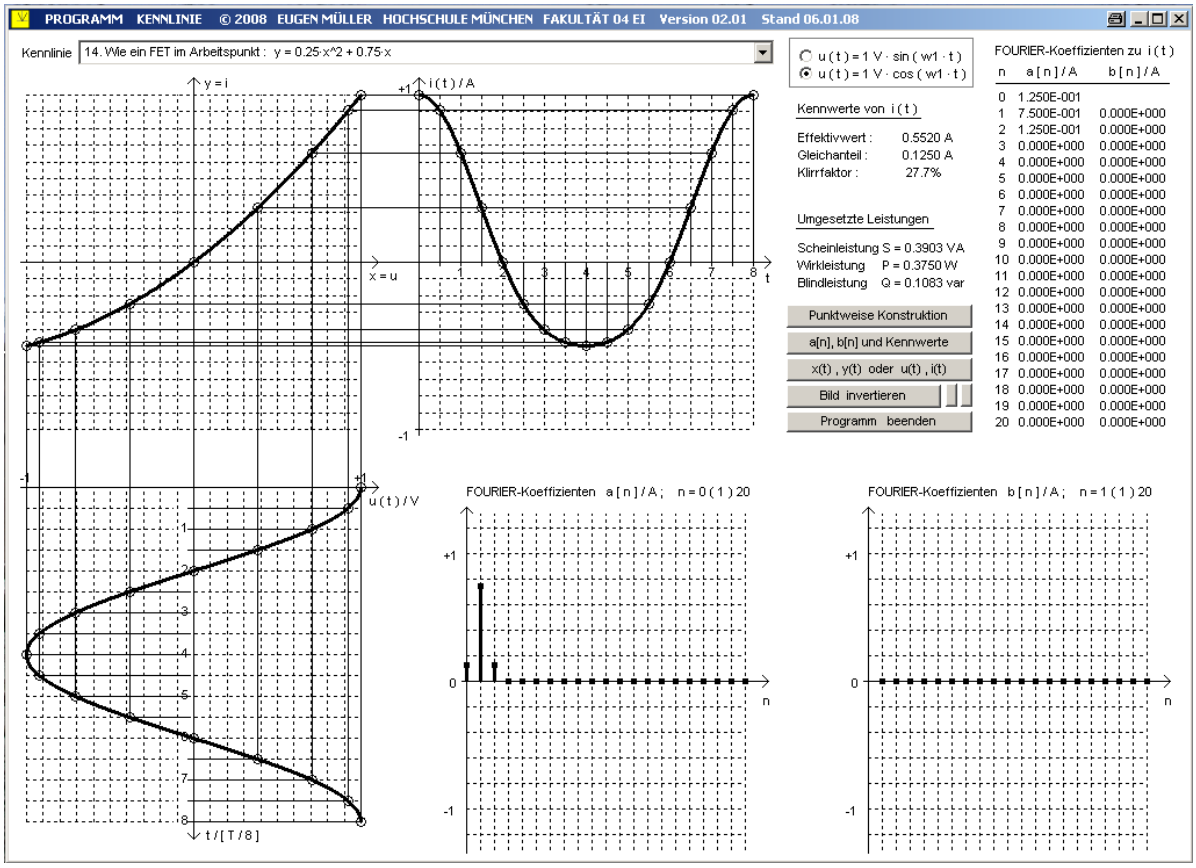
$$\mathbf{\cos^2 x = \frac{1}{2}[1 + \cos(2x)]\ ; \quad \cos^3 x = \frac{1}{4}[3\cos x + \cos(3x)]\ ; \quad \cos^4 x = \frac{1}{8}[3 + 4\cos(2x) + \cos(4x)]\ ; \ \ldots}$$

So kann man aus der Reihenentwicklung der Exponentialfunktion $\mathbf{e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}}$ auch schließen, dass durch eine exponentielle Kennlinie prinzipiell alle Harmonischen erzeugt werden.

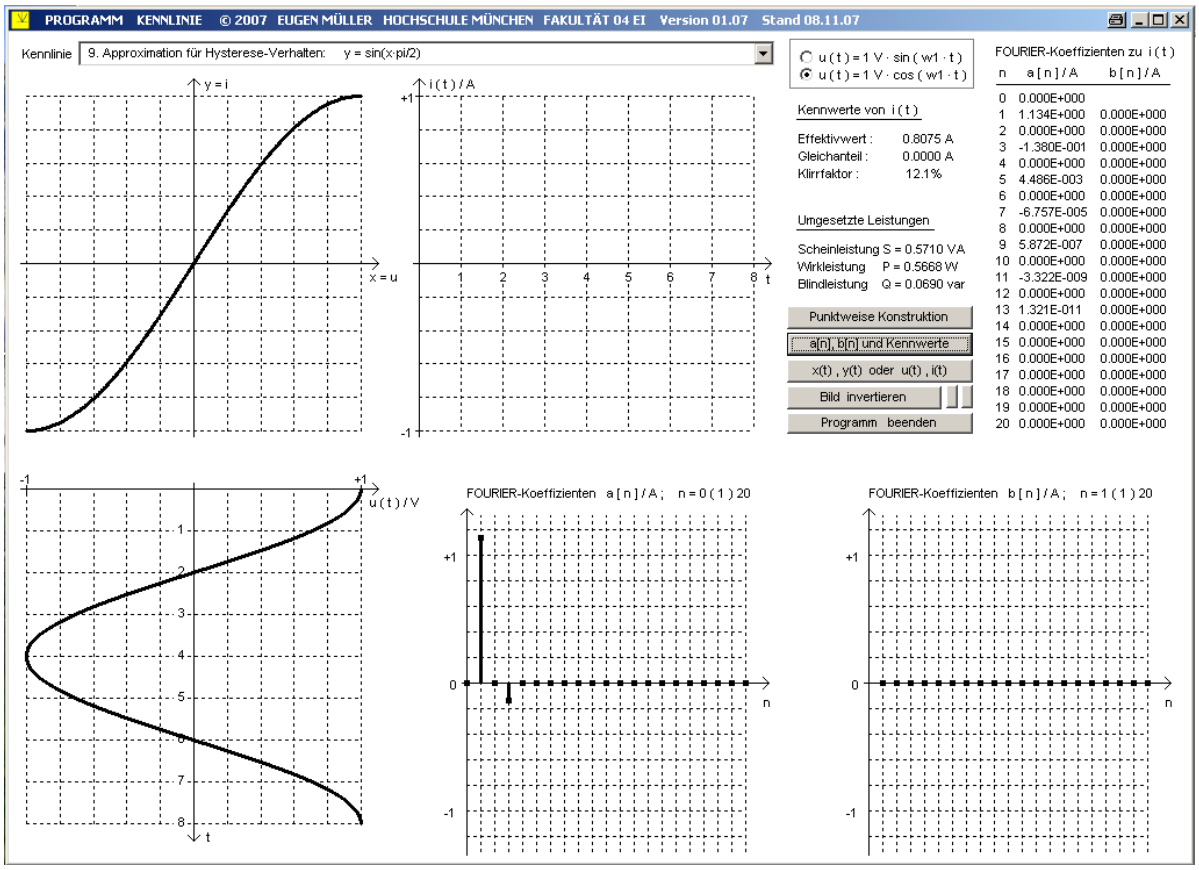
In der Praxis treten gewöhnlich vor allem die niedrigen Ordnungen in Erscheinung, da die Amplituden zu hohen Frequenzen hin (durch den Ausdruck $\mathbf{n!}$ im Nenner) schnell abnehmen.

Beispiele zu sinusförmigen Signalen an nichtlinearen Kennlinien

[Siehe dazu auch die Programme **KENNLINIE** und **POLYNOM_KENNLINIE**]



Punktweise Konstruktion des Verlaufs $\mathbf{i(t)}$ zum Beispiel auf Seite 30.



Ermitteln Sie durch punktweise Konstruktion den Verlauf von $\mathbf{i(t)}$.

3 Die Fourier-Transformation, einmalige Vorgänge

Bei der Betrachtung von Signalen mit der Periodendauer T ergaben sich Linienspektren, in denen nur ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz $\omega_1 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_1$ auftreten.

Der Übergang zu einmaligen Vorgängen gelingt mit dem Grenzübergang $T \to \infty$.
Dann rücken die Spektrallinien beliebig dicht zusammen und das Linienspektrum geht über in ein kontinuierliches Spektrum.

Beispiel: Komplexe Fourier-Reihe der periodischen, rechteckförmigen Spannung $u(t)$.

Einschaltverhältnis:

$$e = \frac{\tau}{T}$$

$$0 < e < 1$$

Gleichanteil: $c_0 = \frac{\hat{u}}{T} \int_{-eT/2}^{eT/2} dt = \frac{e\hat{u}T}{T} = e\hat{u}$ Für $n \neq 0$ gilt für die $\underline{c}_n$:

$$\underline{c}_n = \frac{\hat{u}}{T} \cdot \int_{-eT/2}^{eT/2} e^{-jn\omega_1 t} dt = \frac{\hat{u}}{T} \cdot \frac{e^{-jn\omega_1 \cdot eT/2} - e^{+jn\omega_1 \cdot eT/2}}{-jn\omega_1} = \frac{\hat{u}}{T} \cdot \frac{2}{n\omega_1} \cdot \frac{e^{+jn\omega_1 \cdot eT/2} - e^{-jn\omega_1 \cdot eT/2}}{2j}$$

$$\underline{c}_n = \frac{2\hat{u}}{n\omega_1 T} \cdot \sin(e\,n\,\omega_1\,T/2) = \frac{2\hat{u}}{2/e} \cdot \frac{\sin(e\,n\,\omega_1\,T/2)}{e\,n\,\omega_1\,T/2} = \hat{u} \cdot e \cdot si(e\,n\,\omega_1\,T/2).$$

Die Funktion $\boxed{si(x) = \frac{\sin(x)}{x}}$ ist eine gerade / ungerade Funktion und gibt die Werte der einzelnen Fourier-Koeffizienten an.

Die erste Nullstelle im Spektrum tritt bei der Frequenz $n_0 f_1$ und damit bei der Linie mit der Nummer n_0 auf, wenn das Argument der sinus-Funktion oder auch der si-Funktion gleich π ist und $\frac{1}{e}$ einen ganzzahligen Wert annimmt.

Aus $e\,n_0\,\omega_1\,T/2 = e\,n_0\,\pi = \pi$ folgt $n_0 = \frac{2\pi f_1}{2\pi f_1 e} = \frac{1}{e}$.

Nun sollen vier Fälle gegenübergestellt werden, bei denen die Einschaltdauer eines rechteckförmigen Pulses $\tau = 1$ ms gleich bleibt und die Periodendauer T vergrößert wird.

Nr.	Periodendauer	Grundfrequenz	Einschaltdauer	Einschaltverhältnis	n_0	Gleichanteil
1	T = 5 ms	$f_1 = 200$ Hz	$\tau = 1$ ms	e = 0.2	5	$c_0 = 0.2 \cdot \hat{u}$
2	T = 10 ms	$f_1 = 100$ Hz	$\tau = 1$ ms	e = 0.1	10	$c_0 = 0.1 \cdot \hat{u}$
3	T = 20 ms	$f_1 = 50$ Hz	$\tau = 1$ ms	e = 0.05	20	$c_0 = 0.05 \cdot \hat{u}$
4	$T \to \infty$	$f_1 \to 0$ Hz	$\tau = 1$ ms	$e \to 0$	$\to \infty$	$\to 0$

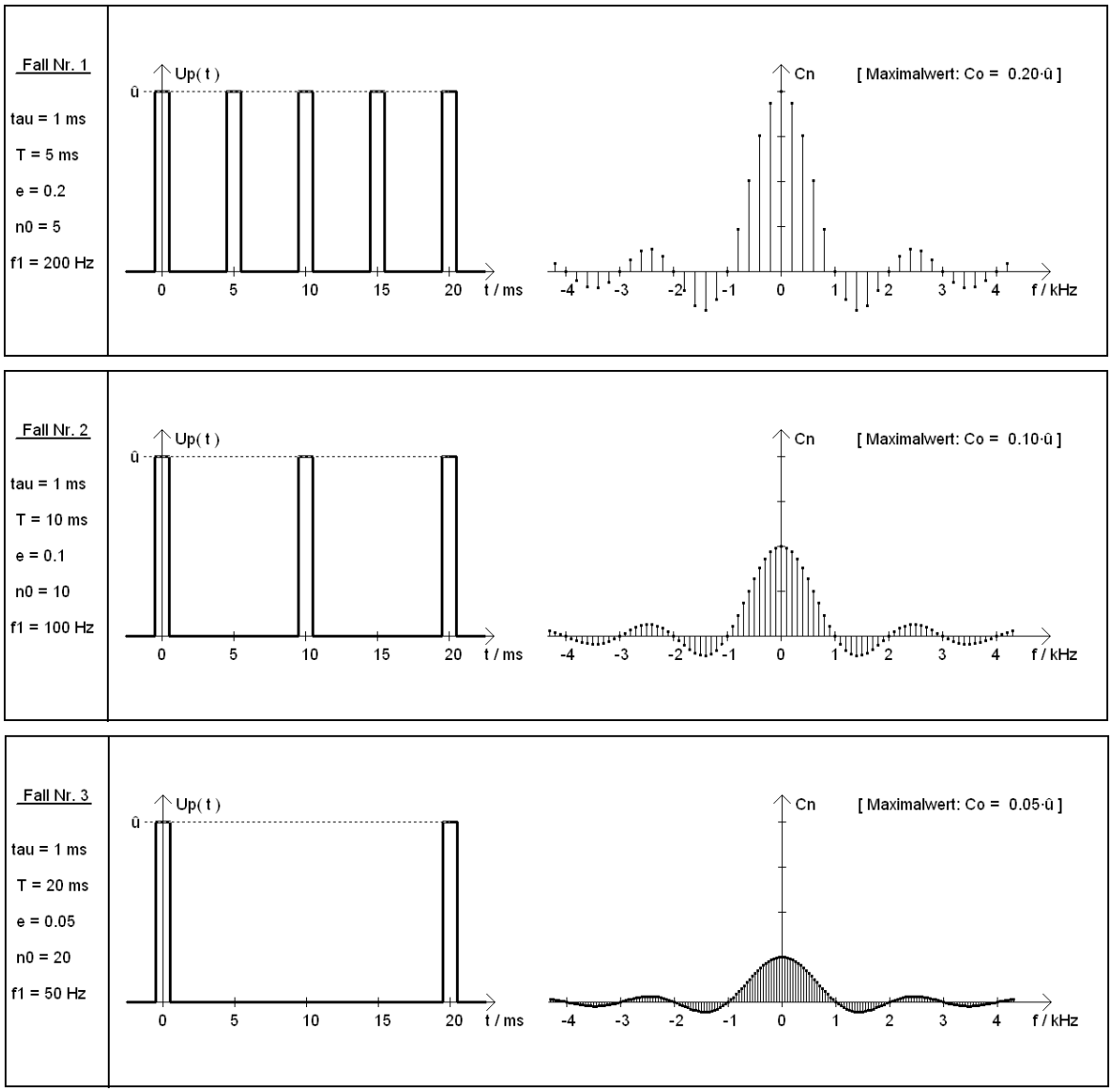
Mit wachsendem Impulsabstand d.h. mit wachsender Periodendauer T verkleinert sich der Linienabstand $\Delta f = \frac{1}{T} = f_1$ und die Amplituden aller Spektralkomponenten nehmen linear ab.

Die folgende Seite zeigt die zugehörigen Zeitfunktionen und Spektren der Fälle Nr. 1 mit Nr. 4.

Zunächst werden die Fälle 1, 2 und 3 betrachtet. Dabei handelt es sich um nichtsinusförmige

PERIODISCHE ZEITFUNKTIONEN $\mathbf{U_p(t)}$ mit LINIENSPEKTREN.

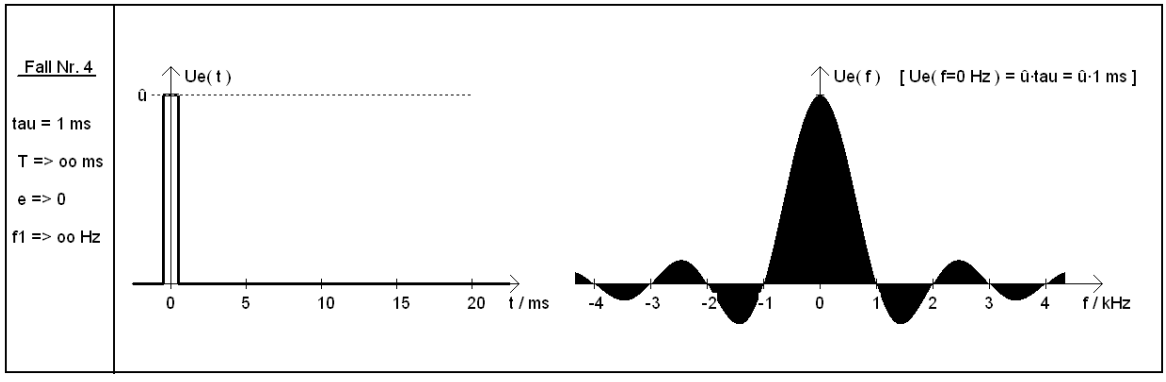
Die Hüllkurven der hier reellen Fourier-Koeffizienten $\mathbf{c_n}$ [sie besitzen die Einheit V] werden durch si-Funktionen gebildet, deren Maxima bei f=0 Hz auftreten und den Gleichanteilen entsprechen.



Fall 4 beschreibt nach dem Grenzübergang $\mathbf{T \to \infty}$ dagegen die

EINMALIGE ZEITFUNKTION $\mathbf{U_e(t)}$ mit einem KONTINUIERLICHEN SPEKTRUM.

Das Maximum dieser Spektraldichtefunktion $\mathbf{U_e(f)}$ die -wegen der gleichen Impulsform- ebenfalls durch eine si-Funktion eingehüllt wird, tritt auch bei f=0 Hz auf und nimmt dort den Wert der Spannungs-Zeit-Fläche des Impulses [mit der Einheit Vs] an.



3.1 Definition der Fourier-Transformation, das Fourier-Integral

Mit den Integralbeziehungen in den Gln. (1, 2) wird die Fourier-Transformation definiert.

$$\underline{\mathbf{F}}(\mathbf{j}\,\omega) = \int_{\mathbf{t}=-\infty}^{+\infty} \mathbf{f}(\mathbf{t})\,\mathbf{e}^{-\mathbf{j}\,\omega\mathbf{t}}\mathbf{dt} \quad (\ 1\ ) \qquad \text{und} \qquad \mathbf{f}(\mathbf{t}) = \tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\pi} \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} \underline{\mathbf{F}}(\mathbf{j}\,\omega)\,\mathbf{e}^{\mathbf{j}\,\omega\mathbf{t}}\mathbf{d}\omega \quad (\ 2\ )$$

Sie stellt für alle technisch wichtigen, einmaligen Vorgänge eine eindeutige Beziehung her zwischen

dem ZEITBEREICH (auch ORIGINALBEREICH genannt) und
dem FREQUENZBEREICH (auch BILDBEREICH genannt).

Im Weiteren werden in dieser Vorlesung nur reelle Zeitfunktionen betrachtet, obwohl die Fourier-Transformation auch auf komplexe Zeitfunktionen anwendbar ist.

Das Signal kann je nach Bedarf wahlweise als Zeitfunktion $\mathbf{f}(\mathbf{t})$ oder gleichwertig als komplexe Spektraldichtefunktion $\underline{\mathbf{F}}(\mathbf{j}\,\omega)$ (auch kurz als 'Spektrum' bezeichnet) betrachtet werden.

Die beiden Funktionen $\underline{\mathbf{F}}(\mathbf{j}\,\omega)$ und $\mathbf{f}(\mathbf{t})$ bilden ein Paar der Fourier-Transformation.

$\underline{\mathbf{F}}(\mathbf{j}\,\omega)$ ist die Fourier-Transformierte von $\mathbf{f}(\mathbf{t})$: $\quad \mathbf{f}(\mathbf{t}) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \underline{\mathbf{F}}(\mathbf{j}\,\omega) = \mathcal{F}\{\mathbf{f}(\mathbf{t})\}.$

$\mathbf{f}(\mathbf{t})$ ist die inverse Fourier-Transformierte von $\underline{\mathbf{F}}(\mathbf{j}\,\omega)$: $\quad \underline{\mathbf{F}}(\mathbf{j}\,\omega) \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \mathbf{f}(\mathbf{t}) = \mathcal{F}^{-1}\{\underline{\mathbf{F}}(\mathbf{j}\,\omega)\}.$

Die Konstante $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\pi}$ in Gl. (1) für $\mathbf{f}(\mathbf{t})$ wird in der Literatur teilweise Gl. (2) für $\underline{\mathbf{F}}(\mathbf{j}\,\omega)$ zugeschlagen oder aufgeteilt als $\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}\pi}}$ sowohl in Gl. (1) als auch in Gl. (2) vorgesehen.

FRAGE: Wodurch unterscheiden sich die Einheiten von $\mathbf{f}(\mathbf{t})$ und $\underline{\mathbf{F}}(\mathbf{j}\,\omega)$?
Welche Einheit besitzt $\underline{\mathbf{U}}(\mathbf{j}\,\omega)$ wenn $\mathbf{u}(\mathbf{t})$ eine Spannung ist ? $\quad [\ \underline{\mathbf{U}}(\mathbf{j}\,\omega)\ ] = \ldots\ldots\ldots$

3.2 Eigenschaften und Gesetze der Fourier-Transformation

An dieser Stelle sollen einige der wichtigsten Eigenschaften und Gesetzmäßigkeiten der Fourier-Transformation bei reellen Zeitfunktionen in einer Übersicht dargestellt werden.

$\mathbf{f}(\mathbf{t})$ besteht aus geradem und ungeradem Anteil; $\quad \underline{\mathbf{F}}(\mathbf{j}\,\omega)$ besteht aus Real- und Imaginärteil.

$$\mathbf{f}(\mathbf{t}) = \mathbf{f_g}(\mathbf{t}) + \mathbf{f_u}(\mathbf{t}) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \underline{\mathbf{F}}(\mathbf{j}\,\omega) = \mathbf{R}(\mathbf{j}\,\omega) + \mathbf{j}\,\mathbf{I}(\mathbf{j}\,\omega)$$

Gerader Anteil :

$$\mathbf{f_g}(\mathbf{t}) = \tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}[\ \mathbf{f}(\mathbf{t}) + \mathbf{f}(-\mathbf{t})\ ] \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \mathbf{R}(\mathbf{j}\,\omega) = \mathbf{R}(-\mathbf{j}\,\omega)$$

$$\mathbf{f_g}(\mathbf{t}) = \tfrac{\mathbf{1}}{\pi} \int_{\omega=\mathbf{0}}^{+\infty} \mathbf{R}(\mathbf{j}\,\omega) \cdot \mathbf{cos}\ \omega\mathbf{t}\ \mathbf{d}\omega \quad ; \quad \mathbf{R}(\mathbf{j}\,\omega) = \mathbf{2} \int_{\mathbf{t}=\mathbf{0}}^{+\infty} \mathbf{f_g}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{cos}\ \omega\mathbf{t}\ \mathbf{dt}$$

Ungerader Anteil :

$$\mathbf{f_u}(\mathbf{t}) = \tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}[\ \mathbf{f}(\mathbf{t}) - \mathbf{f}(-\mathbf{t})\ ] \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \mathbf{j}\,\mathbf{I}(\mathbf{j}\,\omega) = -\mathbf{j}\,\mathbf{I}(-\mathbf{j}\,\omega)$$

$$\mathbf{f_u}(\mathbf{t}) = -\tfrac{\mathbf{1}}{\pi} \int_{\omega=\mathbf{0}}^{+\infty} \mathbf{I}(\mathbf{j}\,\omega) \cdot \mathbf{sin}\ \omega\mathbf{t}\ \mathbf{d}\omega \quad ; \quad \mathbf{j}\,\mathbf{I}(\mathbf{j}\,\omega) = -\mathbf{2}\,\mathbf{j} \int_{\mathbf{t}=\mathbf{0}}^{+\infty} \mathbf{f_u}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{sin}\ \omega\mathbf{t}\ \mathbf{dt}$$

Zuordnungen:
1.) $\mathbf{f}(\mathbf{t})$ reell und gerade $\iff$ $\underline{\mathbf{F}}(\mathbf{j}\,\omega)$ reell und gerade
2.) $\mathbf{f}(\mathbf{t})$ reell und ungerade $\iff$ $\underline{\mathbf{F}}(\mathbf{j}\,\omega)$ imaginär und ungerade

---

Linearität: $\quad \mathbf{f}(\mathbf{t}) = \mathbf{f_1}(\mathbf{t}) + \mathbf{f_2}(\mathbf{t}) + \mathbf{f_3}(\mathbf{t}) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \underline{\mathbf{F}}(\mathbf{j}\,\omega) = \underline{\mathbf{F_1}}(\mathbf{j}\,\omega) + \underline{\mathbf{F_2}}(\mathbf{j}\,\omega) + \underline{\mathbf{F_3}}(\mathbf{j}\,\omega)$

Fourier-Transformation reeller Zeitfunktionen $\mathbf{f(t)}$: Eigenschaften und Gesetze (Fortsetzung)

Ableitung im Zeitbereich: $\mathbf{\frac{d^n f(t)}{dt^n}} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \mathbf{(j\,\omega)^n \cdot \underline{F}(j\,\omega)}$

Integration im Zeitbereich: $\mathbf{\int\limits_{\tau=-\infty}^{t} f(\tau) d\tau} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \mathbf{\frac{\underline{F}(j\,\omega)}{j\,\omega} + \pi \cdot \underline{F}(0) \cdot \delta(\omega)}$

Der zweite Summand tritt nur bei einem Gleichanteil in $\mathbf{\underline{F}(j\,\omega)}$ auf.

Verschiebung im Zeitbereich: $\mathbf{f(t - t_0)} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \mathbf{e^{-j\,\omega \cdot t_0} \cdot \underline{F}(j\,\omega)}$

WICHTIG: Da $\mathbf{|e^{-j\,\omega \cdot t_0}| = 1}$ ändert sich bei dieser Operation das Betragsspektrum nicht.
Jedoch wird durch sie eine Phasenverschiebung um $\mathbf{\Delta\varphi = -\omega \cdot t_0}$ verursacht.
Anwendungen: Zeitdiskrete Signale, Verhalten von Totzeitgliedern im Fach Regelungstechnik 1.

Zeitnormierung ($\mathbf{a \neq 0}$, reell): $\mathbf{f(a \cdot t)} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \mathbf{\frac{1}{|a|}\,\underline{F}(j\,\frac{\omega}{a})}$

Aus dieser Eigenschaft folgt direkt, dass eine zeitliche 'Dehnung' einer Funktion um einen Faktor $\mathbf{a > 1}$ immer zu einer 'Stauchung' des Spektrums um den gleichen Faktor führt.

Faltung im Zeitbereich — Multiplikation im Frequenzbereich

$\mathbf{f_1(t) * f_2(t) = \int\limits_{\tau=-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau) d\tau} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \mathbf{\underline{F}_1(j\,\omega) \cdot \underline{F}_2(j\,\omega)}$

Multiplikation im Zeitbereich — Faltung im Frequenzbereich

$\mathbf{f_1(t) \cdot f_2(t)} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \mathbf{\frac{1}{2\pi}[\,\underline{F}_1(j\,\omega) * \underline{F}_2(j\,\omega)\,] = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{v=-\infty}^{+\infty} \underline{F}_1(v) \cdot \underline{F}_2(\omega - v) dv}$

Dualität der Transformation: $\mathbf{\underline{F}(j\,t)} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \mathbf{2\pi \cdot f(-\omega)}$

Diese Eigenschaft erlaubt es, die Lesrichtung in Korrespondenztabellen umzukehren. Hat man das Verhalten einer gegebenen Zeitfunktion in der Spalte der Bildfunktionen gefunden, kann man die hierzu zugehörige Originalfunktion (mit den oben stehenden Modifikationen) als die gesuchte Bildfunktion verwenden.

Verschiebung im Frequenzbereich: $\mathbf{e^{j\,\omega_0 t} \cdot f(t)} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \mathbf{\underline{F}(j\,[\,\omega - \omega_0\,])}$

Hierdurch lassen sich die Bildfunktionen modulierter Signale relativ einfach ermitteln.

Frequenznormierung ($\mathbf{a \neq 0}$, reell): $\mathbf{\frac{1}{|a|}\,f(\frac{t}{a})} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \mathbf{\underline{F}(j\,a \cdot \omega)}$

Aus dieser Eigenschaft folgt direkt, dass eine 'Dehnung' des Spektrums um einen Faktor $\mathbf{|a| > 1}$ immer zu einer 'Stauchung' der Zeitfunktion um den gleichen Faktor führt.

Parsevalsche Gleichung: $\mathbf{\int\limits_{t=-\infty}^{+\infty} f^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\omega=-\infty}^{+\infty} |\underline{F}(j\,\omega)|^2\,d\omega = \int\limits_{f=-\infty}^{+\infty} |\underline{F}(f)|^2\,df}$

Diese Gleichung zeigt, dass die durch Integration im Zeitbereich gewonnene Größe den gleichen Wert ergibt, wie die durch Integration im Frequenzbereich ermittelte Größe.

Jedes Integral liefert einen Wert, der proportional zu der im Signal $\mathbf{f(t)}$ enthaltenen Energie ist.

Korrespondenztabelle zur Fourier-Transformation

Nr.	Zeit- oder Originalfunktion $\mathbf{f(t)}$	Spektraldichte- oder Bildfunktion $\underline{\mathbf{F}}(\mathbf{j}\,\omega)$

1 Einheitsimpuls

$$\mathbf{f_1(t)} = \delta(\mathbf{t}) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \underline{\mathbf{F}}_\mathbf{1}(\mathbf{j}\,\omega) = \mathbf{1}$$

2 Zwei Einheitsimpulse mit gerader Symmetrie

$$\mathbf{f_2(t)} = \delta(\mathbf{t}+\mathbf{t_0}) + \delta(\mathbf{t}-\mathbf{t_0}) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \underline{\mathbf{F}}_\mathbf{2}(\mathbf{j}\,\omega) = \mathbf{2\cos}(\omega\mathbf{t_0})$$

3 Zwei Einheitsimpulse mit ungerader Symmetrie

$$\mathbf{f_3(t)} = \delta(\mathbf{t}+\mathbf{t_0}) - \delta(\mathbf{t}-\mathbf{t_0}) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \underline{\mathbf{F}}_\mathbf{3}(\mathbf{j}\,\omega) = \mathbf{j\,2\sin}(\omega\mathbf{t_0})$$

4 Vorzeichen-Funktion

$$\mathbf{f_4(t)} = \mathbf{sgn(t)} = \begin{cases} +\mathbf{1} & : \ \mathbf{t} > \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & : \ \mathbf{t} = \mathbf{0} \\ -\mathbf{1} & : \ \mathbf{t} < \mathbf{0} \end{cases} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \underline{\mathbf{F}}_\mathbf{4}(\mathbf{j}\,\omega) = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{j}\,\omega}$$

5 Einheits-Sprungfunktion

$$\mathbf{f_5(t)} = \sigma(\mathbf{t}) = \frac{\mathbf{1}+\mathbf{sgn(t)}}{\mathbf{2}} = \begin{cases} \mathbf{1} & : \ \mathbf{t} > \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & : \ \mathbf{t} \le \mathbf{0} \end{cases} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \underline{\mathbf{F}}_\mathbf{5}(\mathbf{j}\,\omega) = \pi\cdot\delta(\omega) + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{j}\,\omega}$$

6 Rechteck-Impuls (Bild 1)

$$\mathbf{f_6(t)} = \widehat{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{rect}_\tau(\mathbf{t}) = \begin{cases} \widehat{\mathbf{u}} & : \ |\mathbf{t}| \le \tau/\mathbf{2} \\ \mathbf{0} & : \ \mathbf{sonst} \end{cases} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \underline{\mathbf{F}}_\mathbf{6}(\mathbf{j}\,\omega) = \widehat{\mathbf{u}}\cdot\tau\cdot\mathbf{si}(\tfrac{\omega\tau}{\mathbf{2}})$$

7 Dreieck-Impuls (Bild 2)

$$\mathbf{f_7(t)} = \begin{cases} -\widehat{\mathbf{u}}\cdot|\mathbf{t}|/\tau + \widehat{\mathbf{u}} & : \ \mathbf{0} \le |\mathbf{t}| < \tau \\ \mathbf{0} & : \ \mathbf{sonst} \end{cases} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \underline{\mathbf{F}}_\mathbf{7}(\mathbf{j}\,\omega) = \widehat{\mathbf{u}}\cdot\tau\cdot\mathbf{si^2}(\tfrac{\omega\tau}{\mathbf{2}})$$

8 Verschobener Cosinus-Impuls (Bild 3)

$$\mathbf{f_8(t)} = \begin{cases} \frac{\widehat{\mathbf{u}}}{\mathbf{2}}\cdot[\,\mathbf{1}+\cos(\frac{\pi}{\tau}\cdot\mathbf{t})\,] & : \ |\mathbf{t}| \le \tau \\ \mathbf{0} & : \ \mathbf{sonst} \end{cases} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \underline{\mathbf{F}}_\mathbf{8}(\mathbf{j}\,\omega) = \frac{\widehat{\mathbf{u}}\cdot\tau\cdot\mathbf{si}(\omega\cdot\tau)}{\mathbf{1}-[\,\omega\cdot\tau/\pi\,]^\mathbf{2}}$$

In den Bildern 1 - 3 sind die Halbwertsbreiten τ eingetragen. Durch diese Größe wird die Impulsbreite bei dem halben Scheitelwert $\frac{\widehat{u}}{2}$ gekennzeichnet.

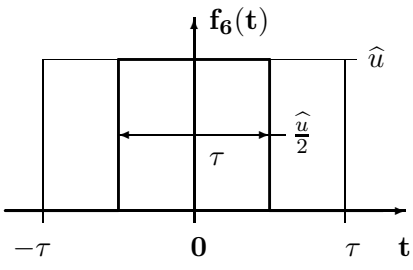


Bild 1.

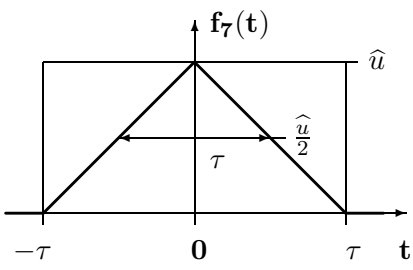


Bild 2.

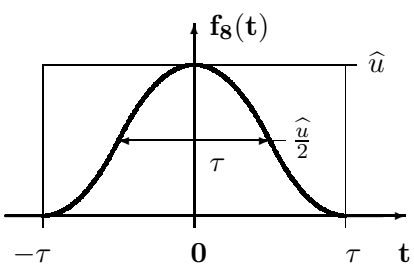


Bild 3.

3.3 Beispiele zur Fourier-Transformation

Ü 25, Ü 26

Aufgaben 1 - 4 :

Berechnen Sie die Spektraldichtefunktionen zu den Zeitfunktionen mit den Nummern 6 , 1 , 2 und 3 auf Seite 36 und skizzieren Sie die zugehörigen Verläufe von $\underline{\mathbf{U}}_{\mu}(\mathbf{j}\,\omega)$.

---

5. Aufgabe:

Hier werden die Spektraldichtefunktionen $\underline{\mathbf{U}}(\mathbf{j}\,\omega)$ der Impulse mit den Nummern 6 , 7 und 8 auf Seite 36 betrachtet und miteinander verglichen.

Alle drei Impulse besitzen die folgende Eigenschaften:

- ihre Zeitfunktionen sind gerade, unipolar und haben
- gleiche Spannungs-Zeit-Flächen: $\int\limits_{\mathbf{t}=-\infty}^{\infty} \mathbf{f_6(t)dt} = \int\limits_{\mathbf{t}=-\infty}^{\infty} \mathbf{f_7(t)dt} = \int\limits_{\mathbf{t}=-\infty}^{\infty} \mathbf{f_8(t)dt} = \ldots\ldots\ldots\ldots$
- gleiche Halbwertsbreiten (d. h. die Impulsbreiten bei $\frac{\widehat{\mathbf{u}}}{\mathbf{2}}$ sind gleich): $\mathbf{t_{0.5}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

a.) Wie berechnen Sie den Wert der kleinsten Kreisfrequenz $\omega_0 > 0$, bei der gilt $\underline{\mathbf{F}}_{\mathbf{8}}(\mathbf{j}\,\omega_{\mathbf{0}}) = \mathbf{0}$? Was ist dabei zu beachten? Welches Problem tritt auf? Wie kann man es überwinden?

b.) Welche Maximalwerte besitzen die Spektraldichtefunktionen $\underline{\mathbf{F}}_{\mathbf{6}}(\mathbf{j}\,\omega)$, $\underline{\mathbf{F}}_{\mathbf{7}}(\mathbf{j}\,\omega)$ und $\underline{\mathbf{F}}_{\mathbf{8}}(\mathbf{j}\,\omega)$? Wo treten diese Maxima auf?

c.) Mit Hilfe der normierten Diagramme auf Seite 38 sind die folgenden Aufgaben zu lösen:

c1.) Ordnen Sie in der Zeichenerklärung die Zeitfunktionen richtig zu.

c2.) Um welchen Faktor unterscheiden sich die Frequenzen, bei denen bei gleichem Wert von τ für einen Dreieck- und einen Cosinus-Impuls die Spektraldichten um ≥ 40 dB gegenüber dem Maximalwert abgefallen sind?

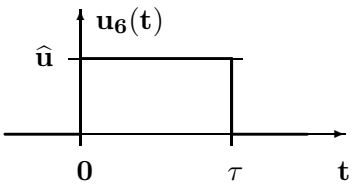
d.) Auf welchem Weg kann man näherungsweise für Rechteck- und Dreieck-Impulse die Frequenzen berechnen, bei denen der Abfall der Spektraldichtefunktion gegenüber dem Maximalwert ≥ 80 dB beträgt?

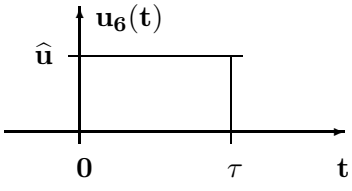
---

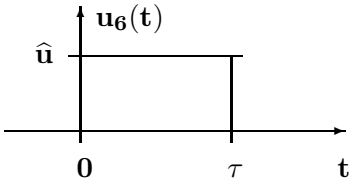
6. Aufgabe:

Geben Sie vier verschiedene Wege zur Berechnung der Spektraldichtefunktion $\underline{\mathbf{U}}_{\mathbf{6}}(\mathbf{j}\,\omega)$ des dargestellten Einzelimpulses $\mathbf{u_6(t)}$ an.

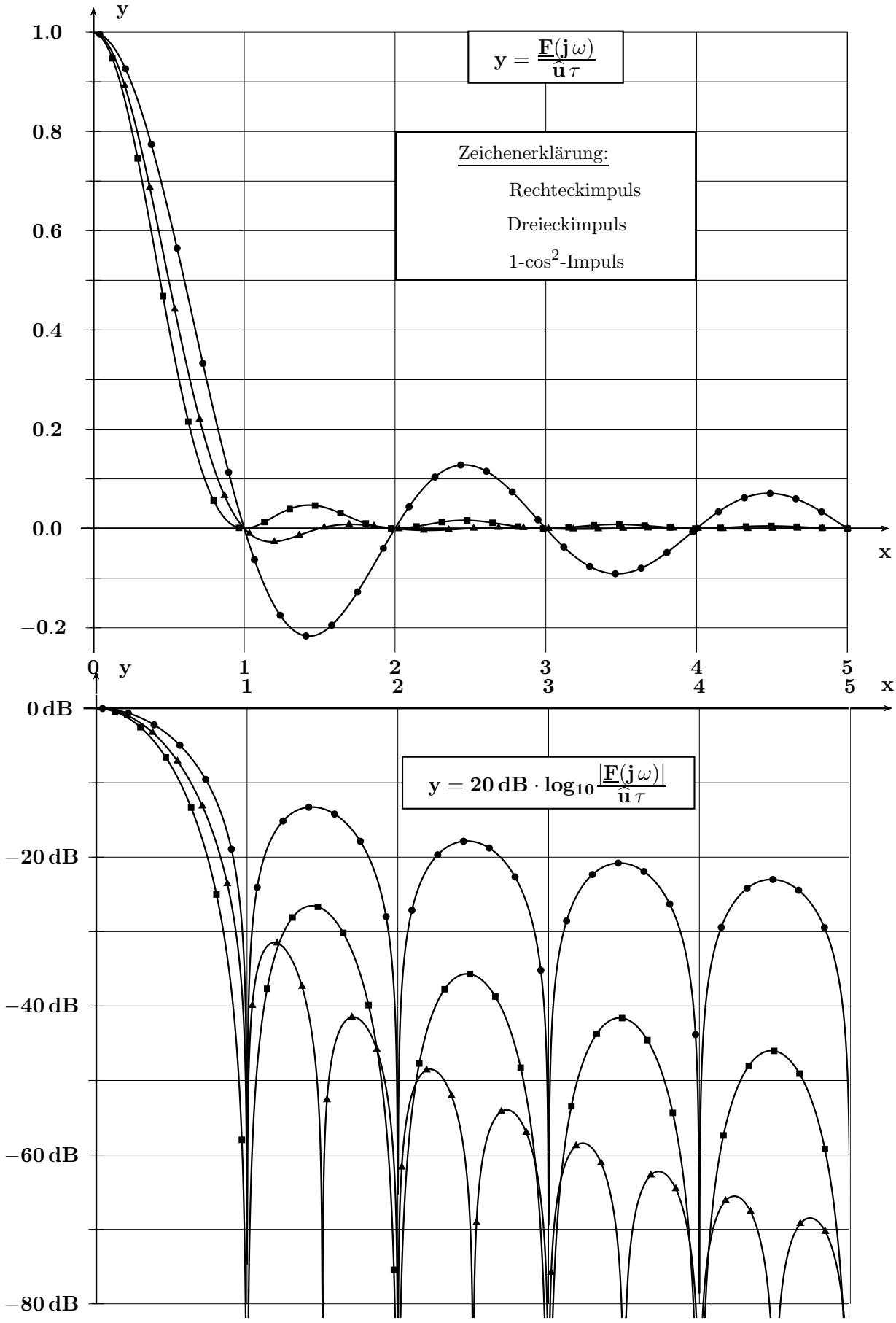
Welcher Weg bietet sich an, wenn nur der Betrag der Funktion gesucht ist?





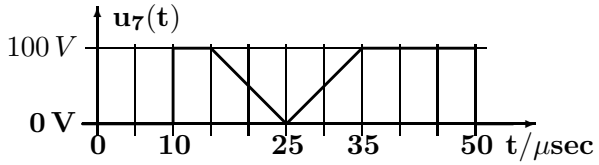


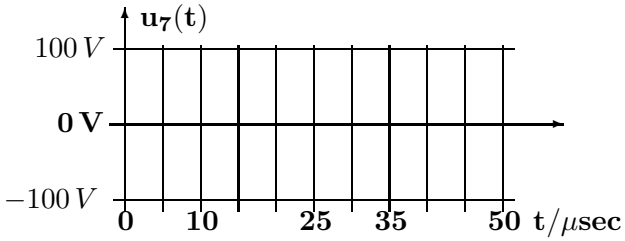
Die normierte Spektraldichtefunktionen der Impulse von Seite 37 sind linear (oben)
und in dB (unten) im normierten Frequenzbereich $\mathbf{0} \leq \boxed{\mathbf{x} = \frac{\omega\,\tau}{\mathbf{2}\,\pi}} \leq \mathbf{5}$ dargestellt.



7. Aufgabe:

Zerlegen Sie die dargestellten Spannung $\mathbf{u_7(t)}$ in zwei Anteile und ermitteln Sie mit Hilfe der Ergebnisse auf Seite 36 die zugehörige Spektraldichtefunktion $\underline{\mathbf{U}}_{\mathbf{7}}(\mathbf{j}\,\omega)$.
Betrachten Sie die Frequenzabhängigkeit der Spektraldichte mit dem Programm
FOURIER_INTEGRAL mit neun Punkten.

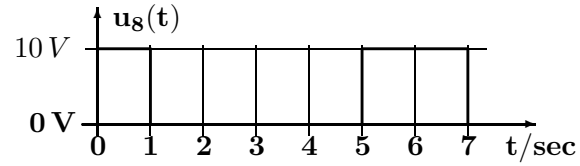


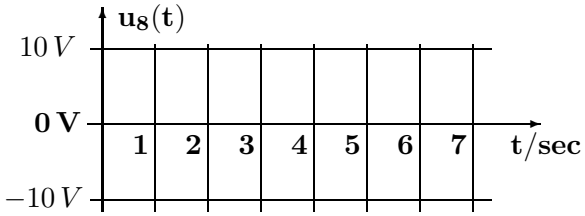


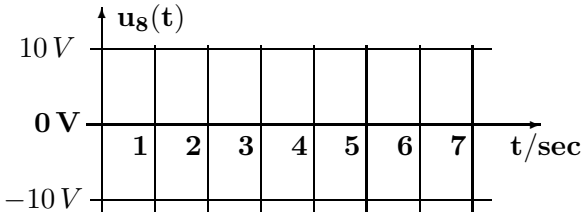
---

8. Aufgabe:

Zerlegen Sie die dargestellten Spannung $\mathbf{u_8(t)}$ auf zwei Wegen in je zwei rechteckförmige Impulse und ermitteln Sie mit Hilfe der Ergebnisse auf Seite 36 die zugehörigen Spektraldichtefunktionen $\underline{\mathbf{U}}_{\mathbf{8}}(\mathbf{j}\,\omega)$.
Betrachten Sie die Frequenzabhängigkeit dieser Funktion mit dem Programm **F_INT_DIMP** .



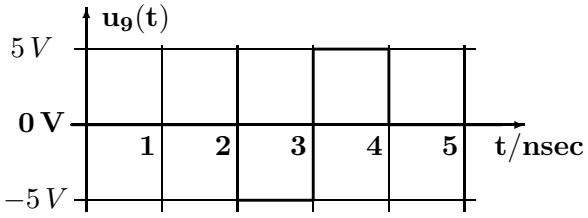


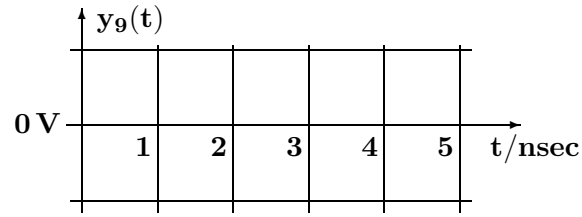


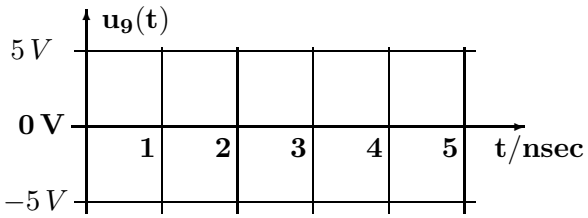
---

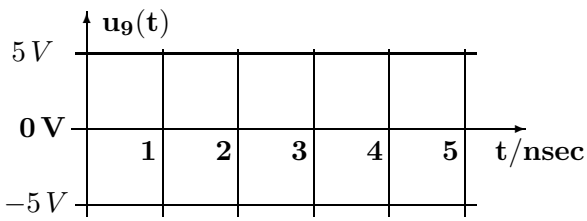
9. Aufgabe:

Ermitteln Sie [Gesetze der Fourier-Transformation und $\underline{\mathbf{F}}_{\mathbf{7}}(\mathbf{j}\,\omega)$ auf Seite 36 verwenden] auf zwei Wegen die zur dargestellten Spannung $\mathbf{u_9(t)}$ gehörigen Spektraldichtefunktionen $\underline{\mathbf{U}}_{\mathbf{9}}(\mathbf{j}\,\omega)$.
Betrachten Sie den Frequenzgang der Spektraldichte mit dem Programm **F_INT_DIMP** .



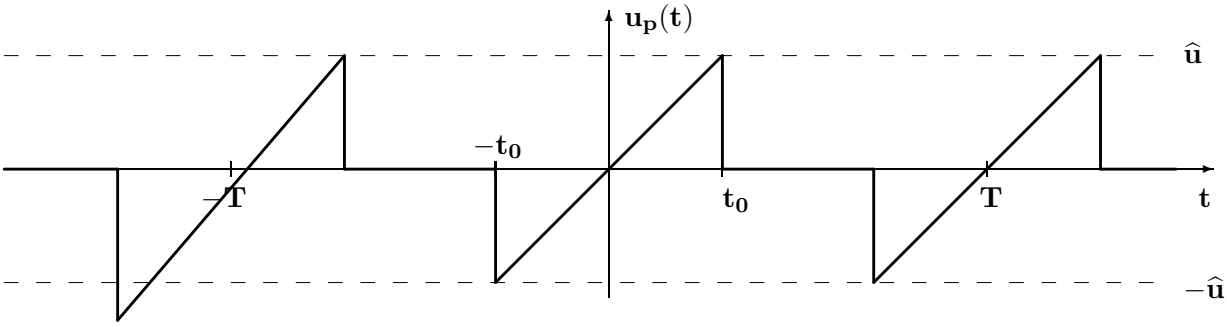






3.4 Verwandtschaft der komplexen Fourier-Koeffizienten mit der Spektraldichtefunktion [Nach einer Idee von Norbert Geng]

Die Berechnung der komplexen Fourier-Koeffizienten $\underline{c}_n$ der im Bild dargestellten periodischen Zeitfunktion $u_p(t)$ mit der Periodendauer T erfolgt nach Gl. (1).



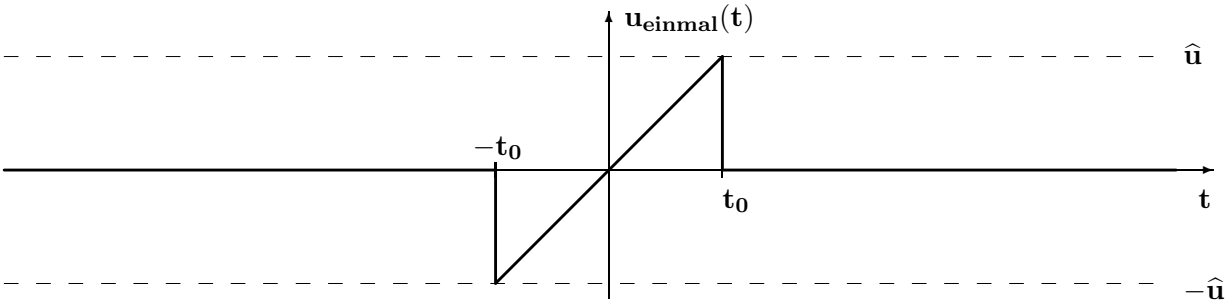
$$\underline{c}_n = \frac{1}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} u_p(t) \cdot e^{-j n\omega_1 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u_p(t) \cdot e^{-j n\omega_1 t} dt \qquad (1)$$

Durch eine einfache Umformung gewinnt man daraus für die weiteren Betrachtungen Gl. (2).

$$\boxed{\underline{c}_n \cdot T = \int_{-T/2}^{T/2} u_p(t) \cdot e^{-j n\omega_1 t} dt} \qquad (2)$$

Der Abstand der Spektrallinien (die Grundfrequenz f_1) beträgt hier $\boxed{f_1 = \frac{1}{T}}$ (3)

Die Berechnung der Spektraldichtefunktion $\underline{U}_{einmal}(j\omega)$ der im folgenden Bild dargestellten einmaligen Zeitfunktion $u_{einmal}(t)$ mit der gleichen Kurvenform (!) wie $u_p(t)$ mit Hilfe des Fourier-Integrals ergibt Gl. (4).



$$\boxed{\underline{U}_{einmal}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{einmal}(t) \cdot e^{-j\omega t} dt} \qquad (4)$$

Beim Grenzübergang $T \to \infty$ geht der Abstand der Spektrallinien nach Gl. (3) gegen Null und das Linienspektrum geht dabei in ein kontinuierliches Spektrum über. Dann gilt

$$\lim_{T\to\infty} \{\underline{c}_n \cdot T\} = \lim_{T\to\infty} \left\{ \int_{-T/2}^{T/2} u_p(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} u_{einmal}(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \qquad (5)$$

und aus Gl. (5) erhält man $\underline{c}_n \cdot T = \underline{U}_{einmal}(j\omega)|_{\omega=n\omega_1}$ und daraus das Ergebnis in Gl. (6).

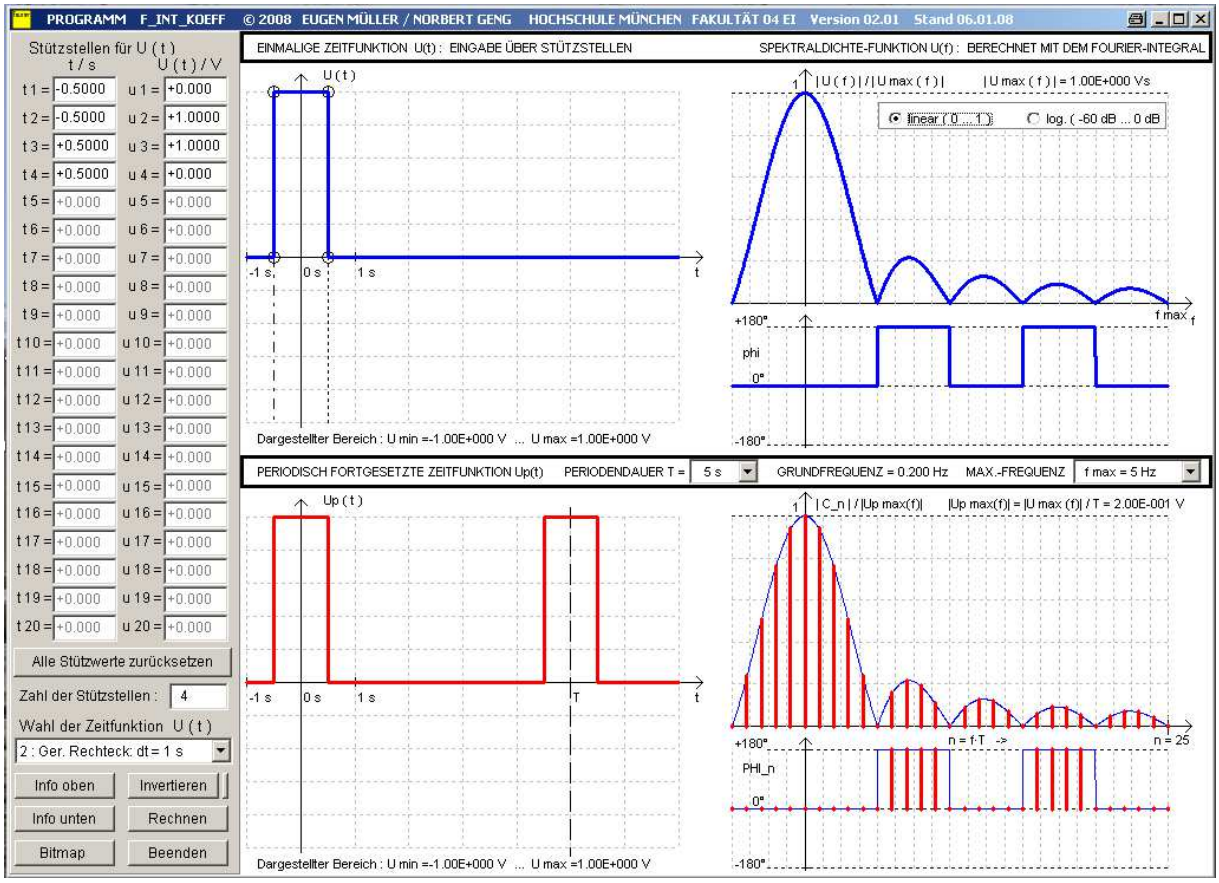
$$\boxed{\boxed{\underline{c}_n = \frac{1}{T} \cdot \underline{U}_{einmal}(j\omega)|_{\omega=n\omega_1}}} \qquad (6)$$

Die folgenden Seiten zeigen zwei Beispiele zu diesem Thema; die zugehörigen Bilder wurden mit dem Programm **F_INT_KOEFF** berechnet.

Ü 27

Das im Bild dargestellte 1. Beispiel zeigt die enge Verwandtschaft zwischen der Spektraldichtefunktion eines einmaligen Signals $\mathbf{U(t)}$ und den komplexen Fourier-Koeffizienten des daraus gebildeten periodischen Signals $\mathbf{U_P(t)}$.

Auf dieser Seite und der folgenden werden abweichend von Seite 40 die Spannungen und die Einheit der Zeit wie im Programm **F_INT_KOEFF** bezeichnet, damit ein direkter Bezug zu den Bildern möglich wird.



Aus der Spektraldichtefunktion eines Rechteckimpulses der Höhe $\hat{\mathbf{u}}$ und der Breite τ sind die komplexen Fourier-Koeffizienten des daraus abgeleiteten Rechteckpulses mit einer Periodendauer $\mathbf{T}$ zunächst allgemein zu berechnen.

$$\mathbf{U(t) = \hat{u} \cdot rect_\tau(t)} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{\underline{U}(j\,\omega) = \hat{u} \cdot \tau \cdot si(\frac{\omega\tau}{2})}$$

Daraus erhält man die Fourier-Koeffizienten des periodischen Signals $\mathbf{U_P(t)}$.

$$\mathbf{\underline{c}_n = \frac{1}{T} \cdot \underline{U}(j\,\omega)|_{\omega=n\omega_1} = \frac{1}{T} \cdot \hat{u} \cdot \tau \cdot si(\frac{\omega\tau}{2})|_{\omega=n\omega_1}}$$

Die tatsächlichen Werte von $\mathbf{\underline{c}_0}$ und $\mathbf{\underline{c}_1}$ lassen sich für die im oben stehenden Bild verwendetet Größen $\mathbf{\hat{u} = 1\,V}$; $\mathbf{\tau = 1\,s}$ und $\mathbf{T = 5\,s}$ wie folgt berechnen.

Mit dem Wert für die Grundkreisfrequenz $\mathbf{\omega_1 = 2\,\pi\,f_1 = \frac{2\,\pi}{T} = 1.257\ \frac{1}{s}}$ erhält man

$$\mathbf{\underline{c}_0 = \tfrac{1}{5\,s} \cdot 1\,V \cdot 1\,s \cdot si(0) = 0.2\,V} \quad \text{(Gleichanteil)}$$

$$\mathbf{\underline{c}_1 = \tfrac{1}{5\,s} \cdot 1\,V \cdot 1\,s \cdot si(1.257\tfrac{1}{s} \cdot 0.5\,s) = 0.2\,V \cdot \frac{sin(0.6285\,rad)}{0.6285} = 0.1871\,V}$$

Im betrachteten Beispiel ist $\mathbf{U(t)}$ und damit auch $\mathbf{U_P(t)}$ eine gerade Zeitfunktion.

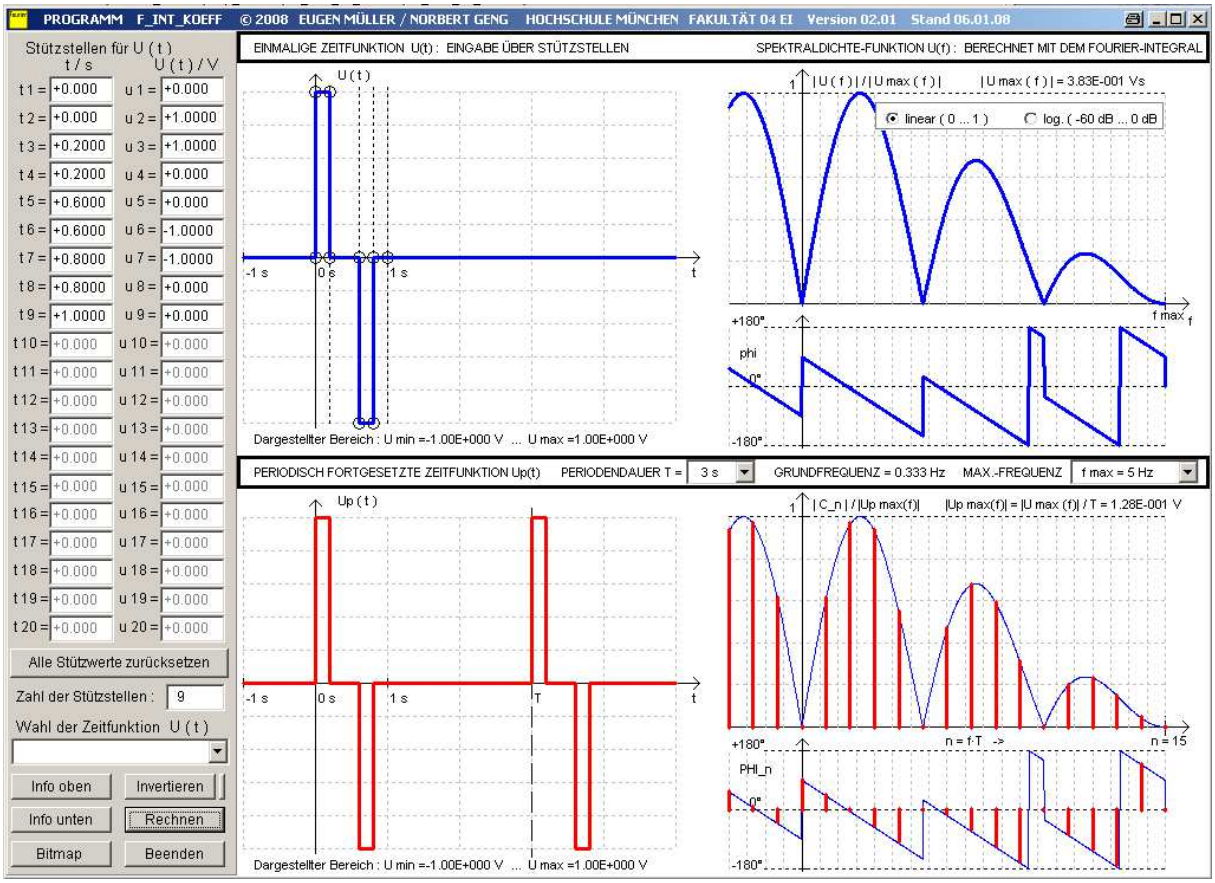
Daraus ergibt sich, dass hier alle komplexen Fourier-Koeffizienten rein reelle Werte besitzen.

2. Beispiel:

a.) Berechnen Sie zunächst die Spektraldichtefunktion des im oberen Bild dargestellten einmaligen Signals $\mathbf{U(t)}$. Entnehmen Sie dazu die Spannungs- und Zeitwerte der neun Stützstellen links im Bild.

b.) Geben Sie die Gleichung zur allgemeinen Berechnung der komplexen Fourier-Koeffizienten des daraus gebildeten periodischen Signals $\mathbf{U_P(t)}$ mit einer Periodendauer $\mathbf{T = 3\,s}$ an.

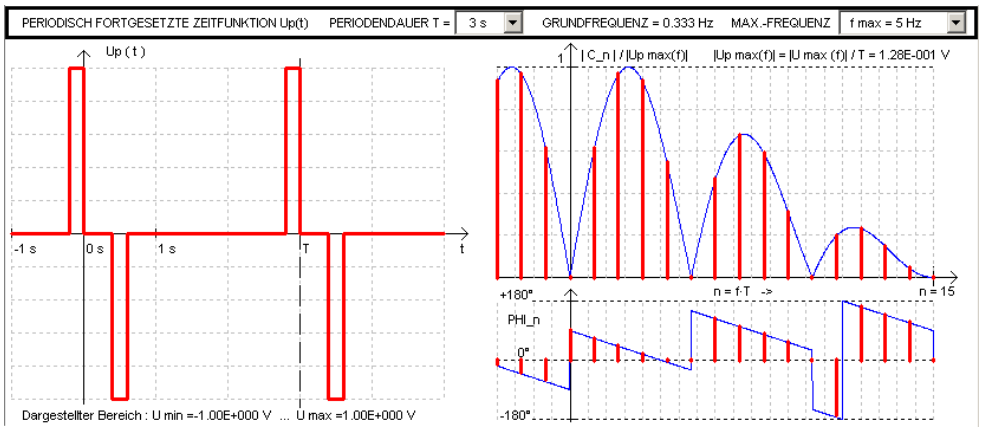
c.) Berechnen Sie mit den Kenngrößen nach a.) und b.) den komplexen Wert von $\underline{\mathbf{c_2}}$.



3.5 Fourier-Reihen zeitverschobener periodischer Funktionen

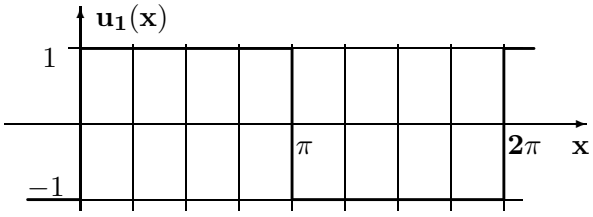
Das folgende Bild zeigt ein um 0.2 s nach links verschobenes (d.h. voreilendes) Abbild der oben betrachteten Zeitfunktion $\mathbf{U(t)}$. Vergleicht man die Linienspektren, zeigt sich in Übereinstimmung mit dem Verschiebungssatz im Zeitbereich der Fourier-Transformation die Gleichheit der Betragsspektren und ein Unterschied im Phasenspektrum: Die Phasenwinkel $\mathbf{\Phi_n}$ der Koeffizienten $\underline{\mathbf{c}}_\mathbf{n}$ wachsen als Folge der Voreilung proportional mit n an: Aus $\mathbf{e^{+j\,\omega\,0.2\,s}}$ folgt für $\omega = \mathbf{n}\,\omega_\mathbf{1}$

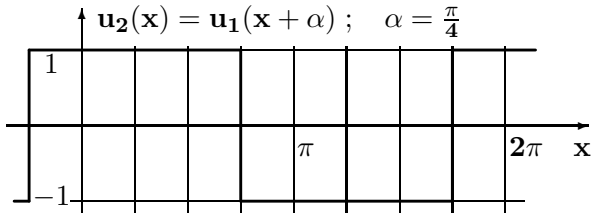
eine Winkeländerung $\mathbf{\Delta\Phi_n = n\,\omega_1\,0.2\,s = n\,2\,\pi\,f_1 \cdot 0.2\,s = n\,2\,\pi\,\frac{0.2\,s}{3\,s} = n \cdot 24°}$



Um aus der bekannten Fourier-Reihe eines Signals $\mathbf{u_1(x)}$ die zu $\boxed{\mathbf{u_2(x) = u_1(x+\alpha)}}$ gehörige Reihe zu ermitteln, ersetzt man in jedem Summanden $\boxed{\mathbf{x \quad \Rightarrow \quad x+\alpha}}$.

Als Beispiel zu diesem Vorgehen betrachten wir das ungerade, bipolare Rechtecksignal, das auf Seite 16 als $\mathbf{f_1(x)}$ dargestellt ist.





Aus der Fourier-Reihe $\mathbf{u_1(x) = \frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin(x)}{1} + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \ldots\right]}$ erhält man

$$\mathbf{u_2(x) = u_1(x+\alpha) = \frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin(x+\alpha)}{1} + \frac{\sin(3[x+\alpha])}{3} + \frac{\sin(5[x+\alpha])}{5} + \ldots\right]}$$

Durch eine Verschiebung der Funktion längs der x-Achse (d.h. wegen x = wt durch eine Zeitverschiebung) bleiben die Amplituden aller Harmonischen gleich. Man sieht also, dass eine Zeitverschiebung keinen Einfluss auf das Betragsspektrum (hier Linienspektrum) hat.

Mit Hilfe der trigonometrischen Beziehung

$$\mathbf{\sin(n[x+\alpha]) = \sin(nx+n\alpha) = \underbrace{\sin(nx)\cdot\cos(n\alpha)}_{\text{Beitrag zum neuen } b_n} + \underbrace{\cos(nx)\cdot\sin(n\alpha)}_{\text{Beitrag zum neuen } a_n}}$$

erkennt man, dass hier abhängig von $\mathbf{n}$ und α aus allen Beiträgen zu den Fourier-Koeffizienten $\mathbf{b_n}$ des ungeraden Signals $\mathbf{u_1(x)}$ in der Fourier-Reihe des zeitverschobenen Signals $\mathbf{u_2(x)}$ ohne Symmetrie sowohl ein sinus- als auch ein cosinus-Anteil (also ein geändertes $\mathbf{b_n}$ wie auch ein neues $\mathbf{a_n}$) entsteht.

Die folgende Gleichung gibt die Fourier-Reihe zu $\mathbf{u_2(x)}$ als Funktion von α an.

$$\mathbf{u_2(x) = \frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin(x)\cos(\alpha)+\cos(x)\sin(\alpha)}{1} + \frac{\sin(3x)\cos(3\alpha)+\cos(3x)\sin(3\alpha)}{3} + \ldots\right]}$$

Zum Bild rechts oben mit $\alpha = \frac{\pi}{4}$ gehört die folgende Fourier-Reihe:

$$\mathbf{u_2(x) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left[\frac{\sin(x)+\cos(x)}{1} + \frac{\sin(3x)-\cos(3x)}{3} - \frac{\sin(5x)+\cos(5x)}{5} + \ldots\right]}$$

Ü 28

4 Systembeschreibung im Zeitbereich und im Frequenzbereich

In diesem Kapitel werden die gebräuchlichen Formen zur Beschreibung 'analoger' Systeme eingeführt, die linear und zeitinvariant (Linear Time Invariant) sind. Alle auftretenden Signale (Spannungen, Ströme, Leistungen, ...) sind wertkontimuierlich (jeder Zwischenwert ist darstellbar) und zeitkontinuierlich (was bedeutet, dass das Signal zu jeder Zeit definiert ist).

Bei linearen Systemen ist der Überlagerungssatz anwendbar und bei zeitinvarianten Systemen ändern sich die Systemkenngrößen (Bauelementewerte) sowie die Systemeigenschaften im eingeschwungenen Zustand (z.B. Verstärkung, Phasenverschiebung, ...) nicht mit der Zeit.

Als Systeme werden in dieser Vorlesung nur relativ einfache elektrische Netzwerke betrachtet und bezüglich ihrer Eigenschaften und ihres Verhaltens untersucht.

4.1 Differenzialgleichungen (DGL) zur Beschreibung im Zeitbereich

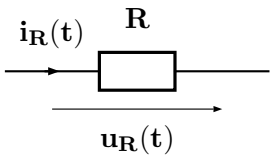
Das Zeitverhalten technischer LTI-Systeme lässt sich durch lineare DGL mit konstanten, reellen Koeffizienten beschreiben. Durch die DGL wird das dynamische Verhalten des Systems d.h. das Verhalten bei Signaländerungen vollständig erfasst.

Die höchste in der DGL auftretende Ableitung bestimmt die Ordnung (oder den Grad) der DGL.

Die Ableitung einer Zeitfunktion $\mathbf{f(t)}$ nach der Zeit kann wie folgt geschrieben werden.

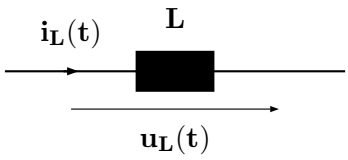
$$\frac{\mathbf{df(t)}}{\mathbf{dt}} = \dot{\mathbf{f}}(\mathbf{t}) = \mathbf{f'(t)} = \frac{\mathbf{df}}{\mathbf{dt}} = \dot{\mathbf{f}} = \mathbf{f'} \quad ; \quad \frac{\mathbf{d^2f(t)}}{\mathbf{dt^2}} = \ddot{\mathbf{f}}(\mathbf{t}) = \mathbf{f''(t)} = \frac{\mathbf{d^2f}}{\mathbf{dt^2}} = \ddot{\mathbf{f}} = \mathbf{f''}$$

Zum Aufstellen der DGL für das Zeitverhalten von RLC-Netzwerken benötigt man Maschengleichungen, Knotenpunktsgleichungen und die folgenden Signalzusammenhänge an den Bauelementen.



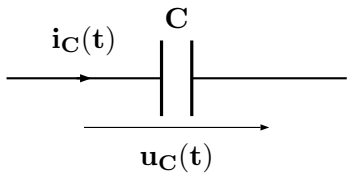
$$\mathbf{u_R(t) = R \cdot i_R(t)}$$

$$\mathbf{i_R(t) = \frac{1}{R} \cdot u_R(t)}$$



$$\boxed{\mathbf{u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}}}$$

$$\mathbf{i_L(t) = \frac{1}{L} \cdot \int_0^t u_L(t)dt}$$



$$\mathbf{u_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i_C(t)dt}$$

$$\boxed{\mathbf{i_C(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt}}}$$

Da in technischen Schaltungen nur endliche Ströme und Spannungen auftreten können, müssen die Ströme durch alle Induktivitäten $\mathbf{i_L(t)}$ und die Spannungen an allen Kapazitäten $\mathbf{u_C(t)}$ immer stetig, d.h. grundsätzlich ohne Sprünge verlaufen!

Zeitfunktionen werden mit Kleinbuchstaben (z.B. $\mathbf{u},\ \mathbf{i},\ \mathbf{p}, \dots$) gekennzeichnet. Zur Verdeutlichung und in Zweifelsfällen kann das Argument angefügt werden (z.B. $\mathbf{u(t)},\ \mathbf{i(t)},\ \mathbf{p(t)}, \dots$) .

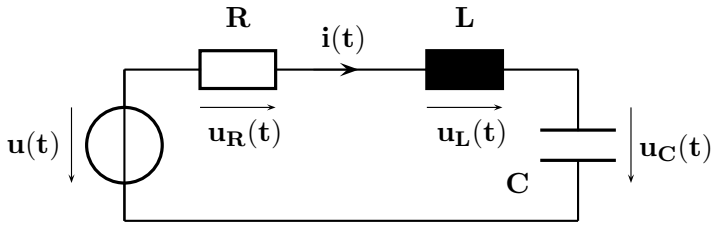
Wie die oben eingerahmten DGL für die Induktivität und die Kapazität gezeigt haben, treten die Bauelementwerte als Koeffizienten der DGL in Erscheinung. Im Weiteren werden deshalb nur solche DGL betrachtet, deren Koeffizienten folgende Eigenschaften besitzen:

- Alle Koeffizienten sind konstant : Die Werte aller Bauelemente sind konstant.
- Alle Koeffizienten sind positiv : Es werden nur passive Bauelemente betrachtet.
- Alle Koeffizienten sind reell : Realisierbare passive Bauelemente haben immer reelle Werte.

In dieser Vorlesung werden ausschließlich DGL der Ordnungen eins und zwei betrachtet, da bei diesen der Rechenaufwand nicht zu groß und auch noch ohne Rechnereinsatz zu bewältigen ist.

Das Aufstellen einer DGL soll nun an einem Beispiel betrachtet werden.

Ausgehend von der Maschengleichung: $\mathbf{u_C(t) + u_R(t) + u_L(t) = u(t)}$ werden die Teilspannungen zunächst als Funktion des Stroms und dann in Abhängigkeit von der Ausgangsgröße (hier die Spannung am Kondensator) angegeben.



$$\mathbf{u_C(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt\ ;\ i(t) = C \cdot u_C'}$$

$$\mathbf{u_R(t) = R \cdot i(t)\ ;\ u_R(t) = RC \cdot u_C'}$$

$$\mathbf{u_L(t) = L \cdot i'(t)\ ;\ u_L(t) = LC \cdot u_C''}$$

Wegen der beiden verschiedenartigen und unabhängigen Energiespeicher (L und C) ist die DGL von zweiter Ordnung. Die enthaltenen Koeffizienten sind reell und konstant, wenn die Werte der Bauelemente R, L und C unabhängig von der Zeit und den auftretenden Signalgrößen (Spannung, Strom) sind.

$$\boxed{\mathbf{u_C + RC \cdot u_C' + LC \cdot u_C'' = u}}$$

Die inhomogene DGL $\mathbf{u_C + RC \cdot u_C' + LC \cdot u_C'' = u}$ beschreibt das Verhalten der Gesamtschaltung einschließlich der äußeren Erregung durch die Spannungsquelle u(t).

Die homogene DGL $\mathbf{u_C + RC \cdot u_C' + LC \cdot u_C'' = 0}$ beschreibt dagegen nur das Verhalten der Schaltung ohne äußere Quellen, wenn z.B. der Kondensator vorgeladen und u(t) = 0 ist.

Aus den Koeffizienten der DGL [im Beispiel RC und LC] lassen sich ihre Eigenwerte berechnen, die das grundsätzliche Verhalten des Netzwerks beschreiben. Zusammen mit einem Satz von Anfangswerten [im Beispiel $\mathbf{u_C(t=0)\ ;\ u_C'(t=0)}$] kann die Reaktion des Netzwerks [hier der Verlauf der Spannung $\mathbf{u_C(t)}$] dann vollständig und eindeutig bestimmt werden.

4.2 Übertragungs-Funktionen zur Beschreibung im Frequenzbereich

Um diese z. B. für Schalt- und Ausgleichsvorgänge in elektrischen Netzwerken erforderliche Funktion aufstellen zu können ist es erforderlich, zunächst die Frequenzabhängigkeit der Blindwiderstände allgemeiner zu fassen.

Durch ein 'analytische Fortsetzung' genanntes Vorgehen der Funktionentheorie wird von dem Verhalten des Netzwerks bei technischen Kreisfrequenzen $\mathbf{j\,\omega}$ auf das Verhalten in einer komplexen Frequenzebene $\mathbf{s = \sigma + j\,\omega}$ [die technischen Kreisfrequenzen findet man auf der positiven imaginären Halbachse] geschlossen und dazu $\mathbf{s}$ als neue, 'komplexe Frequenzvariable' eingeführt. Sie wird für Berechnungen im Bildbereich der Laplace-Transformation benötigt.

Aus diesem Grunde werden ab jetzt mit der Ersetzung $\mathbf{j\,\omega \Longrightarrow s}$ für die Impedanzen von Induktivitäten und Kapazitäten bevorzugt die folgenden Gleichungen verwendet:

$$\boxed{\mathbf{\underline{Z}_L(j\,\omega) = j\,\omega\,L \ \Rightarrow\ \underline{Z}_L(s) = s\,L \quad ; \qquad \underline{Z}_C(j\,\omega) = \frac{1}{j\,\omega\,C} \ \Rightarrow\ \underline{Z}_C(s) = \frac{1}{s\,C}}}$$

Durch eine Analyse (oder wie später gezeigt wird auch aus der DGL) ermittelt man die 'Verstärkung' eines elektrischen Netzwerks aus dem Verhältnis von Ausgangssignal zu Eingangssignal.

Diese wichtige Funktion wird Übertragungs-Funktion genannt und als $\mathbf{\underline{G}(s)}$ (von Gain : Gewinn, Verstärkung) bezeichnet.

$$\boxed{\mathbf{\underline{G}(s) = \frac{\underline{A}(s)}{\underline{E}(s)} = \frac{Zählerpolynom\ \ Z(s)}{Nennerpolynom\ \ N(s)}}}$$

Sie stellt eine vollständige Beschreibung des Netzwerkes dar, wobei -wie später deutlich werden wird- die wesentlichen Informationen in den Pol- und Nullstellen der Funktion enthalten sind.

Bei den hier betrachteten analogen Netzwerken ist die Übertragungs-Funktion immer gebrochen rational.

Sie besteht aus zwei Polynomen in $\mathbf{s}$ mit reellen, konstanten Koeffizienten. Der Grad (oder die Ordnung) des Zählerpolynoms ist meist kleiner ist als der Grad des Nennerpolynoms.

Den Grad eines Polynoms bestimmt man aus der höchsten auftretenden Potenz von $\mathbf{s}$.

Jedes Polynom vom Grad n besitzt immer genau n Nullstellen.

Besitzen alle Nullstellen negative Realteile, nennt man das Polynom ein HURWITZ-POLYNOM.

Sind alle Polynom-Koeffizienten reell und positiv (z.B. technische Bauelementewerte), können einfache (dann gilt v=1) oder mehrfache (dann steht v für die Vielfachheit, die angibt wie viele davon an einem Ort liegen) Nullstellen in der $\underline{s}$-Ebene grundsätzlich nur auftreten

- auf der reellen Achse ('reelle Nullstellen') der Form $(\mathbf{s}-\mathbf{s_0})^{\mathbf{v}}$ für reelles $\mathbf{s_0}$ und/oder
- als konjugiert komplexe Paare der Form $[(\mathbf{s}-\underline{\mathbf{s}}_{\mathbf{0}})(\mathbf{s}-\underline{\mathbf{s}}_{\mathbf{0}}^{*})]^{\mathbf{v}}$ für komplexes $\underline{\mathbf{s}}_{\mathbf{0}}$.

Jede gebrochen rationale Funktion kann dargestellt werden in der SUMMENFORM

$$\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{s})=\frac{\mathbf{b_m\cdot s^m+b_{m-1}\cdot s^{m-1}+\ldots+b_2\cdot s^2+b_1\cdot s+b_0}}{\mathbf{a_n\cdot s^n+a_{n-1}\cdot s^{n-1}+\ldots+a_2\cdot s^2+a_1\cdot s+a_0}}=\frac{\sum\limits_{\mu=0}^{\mathbf{m}}\mathbf{b}_\mu\cdot\mathbf{s}^\mu}{\sum\limits_{\nu=0}^{\mathbf{n}}\mathbf{a}_\nu\cdot\mathbf{s}^\nu}=\frac{\mathbf{Z(s)}}{\mathbf{N(s)}}$$

oder gleichwertig in der PRODUKTFORM :

$$\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{s})=\mathbf{Q}\cdot\frac{(\mathbf{s}-\mathbf{s_{01}})\cdot(\mathbf{s}-\mathbf{s_{02}})\ldots(\mathbf{s}-\mathbf{s_{0m-1}})\cdot(\mathbf{s}-\mathbf{s_{0m}})}{(\mathbf{s}-\mathbf{s_{\infty 1}})\cdot(\mathbf{s}-\mathbf{s_{\infty 2}})\ldots(\mathbf{s}-\mathbf{s_{\infty n-1}})\cdot(\mathbf{s}-\mathbf{s_{\infty n}})}=\mathbf{Q}\cdot\frac{\prod\limits_{\mu=1}^{\mathbf{m}}(\mathbf{s}-\mathbf{s}_{0\mu})}{\prod\limits_{\nu=1}^{\mathbf{n}}(\mathbf{s}-\mathbf{s}_{\infty\nu})}=\frac{\mathbf{Z(s)}}{\mathbf{N(s)}}$$

Der Wert der Konstante $\mathbf{Q}=$ / ist so festzulegen, dass die Höchstkoeffizienten der Polynome Z(s) und N(s) in beiden Darstellungen gleich sind.

Der Grad von $\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{s})$ ergibt sich aus der höchsten in Z(s) oder N(s) enthaltenen Ordnung von s.

Nach dem FUNDAMENTALSATZ DER ALGEBRA [Gauß, 1799] besitzt jede gebrochen rationale Funktion vom Grad n immer genau n Polstellen und n Nullstellen.

Sind Z(s) und N(s) von verschiedenem Grad, liegen 'fehlende' Pol- und Nullstellen bei Unendlich.

Im allgemeinen Fall liegen die Pol- und Nullstellen $s_{\infty\nu}$, $s_{0\mu}$ in der komplexen $\underline{s}$- Ebene.

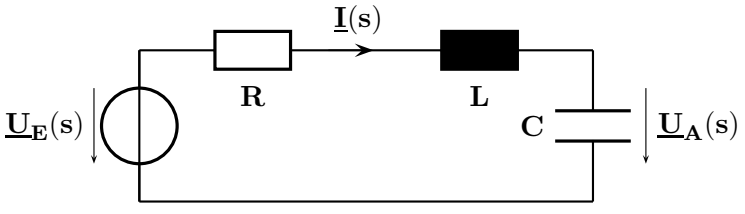
Die Lage der Singularitäten ($\widehat{=}$ Pol- und Nullstellen) in der $\underline{s}$- Ebene wird grafisch in einem POL-NULLSTELLEN-PLAN (PN-Plan) dargestellt.

Symbol für Nullstellen : **o** $\quad \mathbf{s_{0\mu}}=\alpha_{\mathbf{0\mu}}+\mathbf{j}\,\beta_{\mathbf{0\mu}};$ Laufzahl $\mu=\mathbf{1,2,\ldots,m}.$

Symbol für Polstellen : **x** $\quad \mathbf{s}_{\infty\nu}=\alpha_{\infty\nu}+\mathbf{j}\,\beta_{\infty\nu};$ Laufzahl $\nu=\mathbf{1,2,\ldots,n}.$

Ergänzt man den PN-Plan um die Konstante Q, ist $\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{s})$ damit vollständig beschrieben.

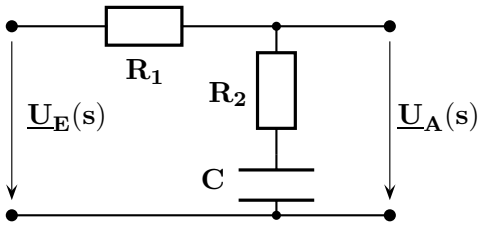
Ein einfaches Beispiel zum Aufstellen der Übertragungs-Funktion $\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{s})=\frac{\underline{\mathbf{U_A}}(\mathbf{s})}{\underline{\mathbf{U_E}}(\mathbf{s})}$:



Da im betrachteten Beispiel alle Bauelemente vom gleichen Strom durchflossen werden, findet man die gesuchte 'Verstärkungs-Funktion' durch Auswertung des unbelasteten Spannungsteilers.

$$\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{s})=\frac{\underline{\mathbf{U_A}}(\mathbf{s})}{\underline{\mathbf{U_E}}(\mathbf{s})}=\frac{\underline{\mathbf{I}}(\mathbf{s})\cdot\underline{\mathbf{Z_C}}(\mathbf{s})}{\underline{\mathbf{I}}(\mathbf{s})\cdot[\,\underline{\mathbf{Z_R}}(\mathbf{s})+\underline{\mathbf{Z_L}}(\mathbf{s})+\underline{\mathbf{Z_C}}(\mathbf{s})\,]}=\frac{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{sC}}}{\mathbf{R+sL+\frac{1}{sC}}}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1+sRC+s^2LC}}$$

Beispiel: $\mathbf{R_1 = 100\ k\Omega}$; $\mathbf{R_2 = 25\ k\Omega}$; $\mathbf{C = 0.2\ \mu F}$



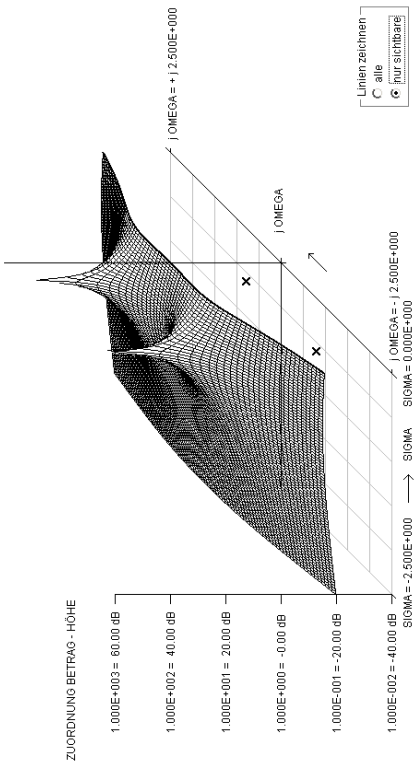
a.) Stellen Sie $\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{s}) = \frac{\underline{\mathbf{U}}_\mathbf{A}(\mathbf{s})}{\underline{\mathbf{U}}_\mathbf{E}(\mathbf{s})}$ in der Summenform auf.

b.) Stellen Sie $\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{s}) = \frac{\underline{\mathbf{U}}_\mathbf{A}(\mathbf{s})}{\underline{\mathbf{U}}_\mathbf{E}(\mathbf{s})}$ in der Produktform auf.

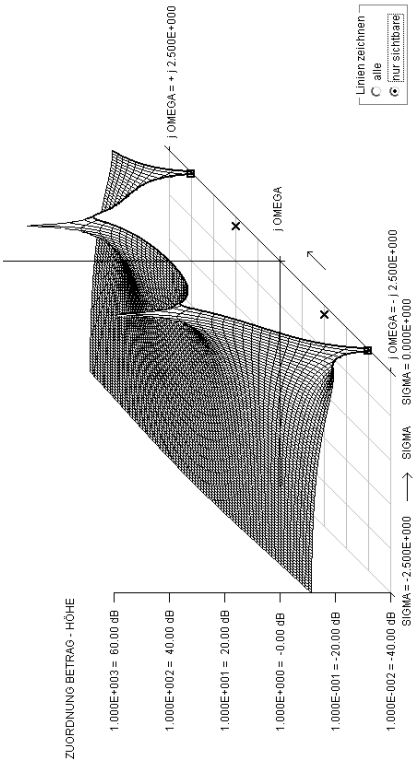
c.) Zeichnen Sie den PN-Plan und geben Sie Q an.

d.) Wie verändert sich der PN-Plan für $\mathbf{R_2 = 0\,\Omega}$?

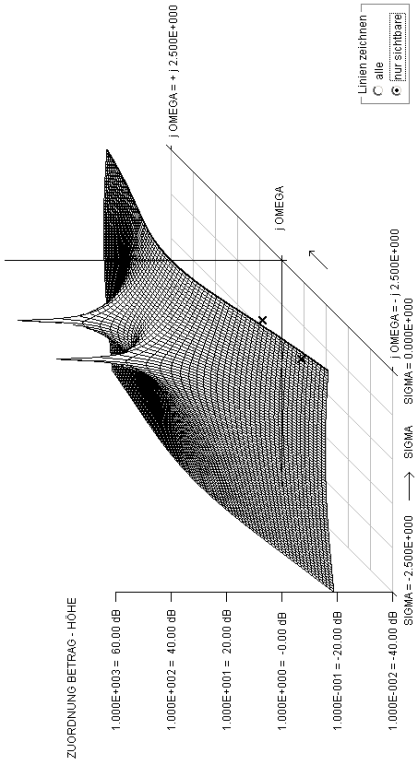
Für das Verständnis hilfreich sind Pseudo 3D-Bilder des Betrags $|\ \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{s} = \sigma + \mathbf{j}\,\omega)\ |$ über einem Ausschnitt der s-Ebene. Beachten Sie besonders den Betrag längs der Halbachse $\mathbf{s} = \mathbf{j}\,\omega$.



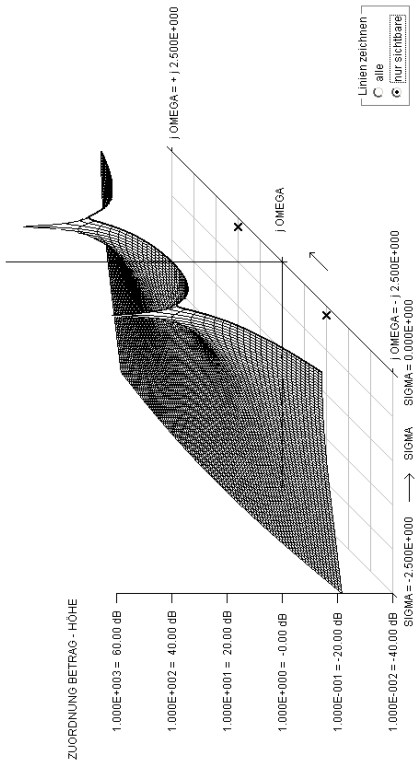
$$\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1 + 1.2s + s^2}} \qquad [\ 2\ \text{NS bei}\ \mathrm{s} \to \infty\ ]$$



$$\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{1 + 0.25s^2}}{\mathbf{1 + 0.2s + s^2}}$$



$$\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1 + 1.8s + s^2}} \qquad [\ 2\ \text{NS bei}\ \mathrm{s} \to \infty\ ]$$



$$\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1 + 0.2s + s^2}} \qquad [\ 2\ \text{NS bei}\ \mathrm{s} \to \infty\ ]$$

4.3 Stationäres Verhalten, Frequenzgang, Bode-Diagramm

Stationäres Verhalten:

Erregt man ein lineares System mit einem sinusförmigen Eingangssignal (Das einseitige Spektrum dieses Signals enthält [anders als sprung- oder impulsförmige Signale] nur eine einzige Linie !)

$$\mathbf{x_E(t) = \hat{x}_E \cdot \sin(\omega t + \varphi_E)}$$

und wartet das Abklingen der Ausgleichs- und Einschwingvorgänge ab, verlaufen alle Signale des Systems (im Inneren und am Ausgang) ebenfalls sinusförmig mit der gleichen Frequenz.

$$\mathbf{x_A(t) = \hat{x}_A \cdot \sin(\omega t + \varphi_A)}$$

Im allgemeinen Fall unterscheiden sich Amplitude und Phasenwinkel am Ausgang von den Kennwerten des Eingangssignals.

Zur Ermittlung des STATIONÄREN VERHALTENS (d. h. des EINGESCHWUNGENEN ZUSTANDS) eines linearen dynamischen Systems (z.B. des RLC-Netzwerks auf der folgenden Seite) beim Betrieb mit der Frequenz ω wertet man die ÜBERTRAGUNGS-FUNKTION $\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{s}) = \frac{\underline{\mathbf{X}}_\mathbf{A}}{\underline{\mathbf{X}}_\mathbf{E}}$ für $\mathbf{s = j\,\omega}$ aus. Die frequenzabhängige, komplexwertige Funktion $\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{j\,\omega})$ kann als Real- und Imaginärteil oder gleichwertig mit ihrem Betrag und Winkel dargestellt werden.

$$\boxed{\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{j\,\omega}) = \frac{\underline{\mathbf{X}}_\mathbf{A}}{\underline{\mathbf{X}}_\mathbf{E}} \quad = \quad \mathbf{Re}\{\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{j\,\omega})\} + \mathbf{j\ Im}\{\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{j\,\omega})\} \quad = \quad |\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{j\,\omega})| \cdot \mathbf{e}^{\mathbf{j}\varphi(\mathbf{j\,\omega})}}$$

Frequenzgang:

Berechnet man bei einer großen Anzahl von Frequenzen die Werte von $\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{j\,\omega})$, kann man durch das Verbinden benachbarter Punkte (z.B. in einer $\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{j\,\omega})$-Ebene) den FREQUENZGANG, das heißt die Frequenzabhängigkeit des betrachteten Systems, grafisch darstellen.

Das Bode-Diagramm:

Zur Darstellung des Frequenzgangs eignet sich das BODE-DIAGRAMM besonders gut. Hier werden $|\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{j\,\omega})|$ und $\varphi(\mathbf{j\,\omega})$ in einer besonderen Form aufgetragen, woraus sich Vorteile beim praktischen Gebrauch ergeben.

- Betrag und Winkel werden in einem meist zweigeteilten Diagramm eingetragen.
- Die (Kreis-) Frequenzachse gilt für Betrag und Winkel und ist logarithmisch unterteilt.
- Der Betrag wird im oberen Diagrammteil als logarithmierte Verstärkung $\mathbf{v(j\,\omega) = 20\ dB \cdot \log_{10}(|\underline{G}(j\,\omega)|)}$ mit der Pseudoeinheit dB dargestellt.
- Im unteren Teil des Diagramms wird der Winkel $\varphi(\mathbf{j\,\omega})$ mit einer linearen Achsenteilung eingezeichnet.

Vorteile des Bode-Diagramms:

Die Produkte komplexer Übertragungs-Funktionen $\underline{\mathbf{G}}_\mu(\mathbf{j\,\omega})$, wie sie bei der Kettenschaltung entkoppelter Teilschaltungen zu berechnen sind, werden durch die Achsenteilungen für Betrag und Winkel auf

- die Addition der logarithmierten Beträge $\mathbf{v(j\,\omega) = \sum v_\mu(j\,\omega)}$
- und die Addition der Phasenwinkel $\varphi(\mathbf{j\,\omega}) = \sum \varphi_\mu(\mathbf{j\,\omega})$

der Teilfunktionen zurückgeführt: Gesamtfrequenzgang $\widehat{=}$ Summe der Teilfrequenzgänge.

Alle Funktionen mit einfachen oder mehrfachen reellen Pol- und Nullstellen lassen sich wegen der logarithmischen Teilungen von Frequenz- und Betragsachse recht genau durch Polygonzüge annähern.

Nutzen Sie auch die beiden Programme **BODE** zum Formatieren, Drucken und Speichern von Diagramm-Formularen und **BODE_LERNEN** zum Lernen und Üben der wichtigsten Schritte im Zusammenhang mit dem Bode-Diagramm bei reellen Pol- und Nullstellen.

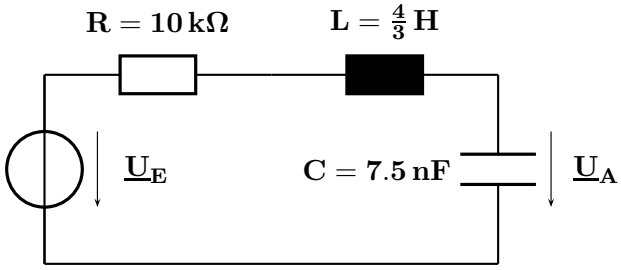
Ermittlung des Frequenzganges und Darstellung im Bode-Diagramm : Teil 1

Das Aufstellen und Auswerten der Übertragungs-Funktion sowie die punktweise Ermittlung des Frequenzganges soll an einem Serienschwingkreis (passiver Tiefpass vom Grad n = 2) erklärt werden.

Die ungedämpfte Eigenkreisfrequenz ω_0 ist hier gleich der Resonanzkreisfrequenz : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^4 \frac{1}{sec}$

Schwingkreis-Güte = $\frac{\omega_0 L}{R} = \frac{4}{3}$

Dämpfungsgrad : $D = \frac{1}{2 \cdot Güte} = \frac{3}{8}$



$$\underline{G}(s) = \frac{\underline{U}_A}{\underline{U}_E} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + sL + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{1 + sRC + s^2LC} = \frac{1}{1 + s \cdot 7.5 \cdot 10^{-5} sec + s^2 \cdot 10^{-8} sec^2}$$

Die Auswertung von $\underline{G}(s)$ bei der (Kreis-) Frequenz $s = j\omega = j\,2\pi f$ ergibt für den eingeschwungenen Zustand die Frequenzgang-Funktion

$$\underline{G}(j\omega) = \frac{\underline{U}_A}{\underline{U}_E} = \frac{1}{1 - \omega^2 \cdot LC + j\omega \cdot RC} = \frac{1}{1 - \omega^2 \cdot 10^{-8} sec^2 + j\omega \cdot 7.5 \cdot 10^{-5} sec} \cdot$$

Der Betrag $|\underline{G}(j\omega)|$ beschreibt die VERSTÄRKUNG bei der (Kreis-) Frequenz $\omega = 2\pi f$.

$$|\underline{G}(j\omega)| = \frac{\hat{u}_A}{\hat{u}_E} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 \cdot 10^{-8} sec^2)^2 + (\omega \cdot 7.5 \cdot 10^{-5} sec)^2}}$$

und der Winkel von $\underline{G}(j\omega)$ gibt die die Winkeldifferenz d.h. die PHASENVERSCHIEBUNG zwischen dem Ausgangs- und dem Eingangssignal an.

$$\varphi(j\omega) = \varphi_A(j\omega) - \varphi_E(j\omega) = \varphi_Z(j\omega) - \varphi_N(j\omega) = 0 - \arctan \frac{\omega \cdot 7.5 \cdot 10^{-5} sec}{1 - \omega^2 \cdot 10^{-8} sec^2}$$

Das Verhalten des Tiefpass-Netzwerks wurde für die folgenden vier Kreisfrequenzen berechnet:

$$\omega_1 = 0\ \frac{1}{sec}, \quad \omega_2 = 5\,000\ \frac{1}{sec}, \quad \omega_3 = 10\,000\ \frac{1}{sec}, \quad \omega_4 = 20\,000\ \frac{1}{sec}$$

Die Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst.

ω·sec	$\underline{G}(j\omega)$	$\underline{G}(j\omega)$	$\lvert\underline{G}(j\omega)\rvert$	$\frac{\lvert\underline{G}(j\omega)\rvert}{dB}$	$\frac{\varphi(j\omega)}{^o}$
0	$\frac{1}{1-0\cdot10^{-8}+j\,0\cdot7.5\cdot10^{-5}}$	1.0000 + j 0.0000	1.0000	0.00	0.00
$5 \cdot 10^3$	$\frac{1}{1-25\cdot10^{6}\cdot10^{-8}+j\,5\cdot10^{3}\cdot7.5\cdot10^{-5}}$	1.0667 - j 0.5333	1.1926	1.53	-26.57
$10 \cdot 10^3$	$\frac{1}{1-100\cdot10^{6}\cdot10^{-8}+j\,10\cdot10^{3}\cdot7.5\cdot10^{-5}}$	0.0000 - j 1.3333	1.3333	2.50	-90.00
$20 \cdot 10^3$	$\frac{1}{1-400\cdot10^{6}\cdot10^{-8}+j\,20\cdot10^{3}\cdot7.5\cdot10^{-5}}$	-0.2667 - j 0.1333	0.2981	-10.51	-153.44

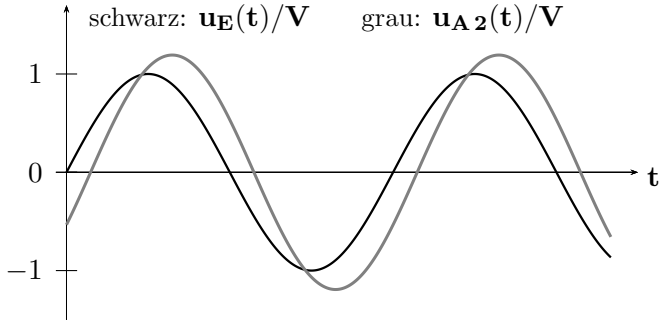
Ermittlung des Frequenzganges und Darstellung im Bode-Diagramm : Teil 2

Hier werden die Zeitfunktionen des eingeschwungenen Zustandes betrachtet und die aus ihnen ermittelten Kennwerte in das zugehörige Bode-Diagramm übertragen.

Zeitfunktionen für $\omega_2 = 5\,000\ \frac{1}{sec}$
im Zeitbereich $0 \le t \le 2.531\ ms$

Eingangsspannung: $u_E(t)$
mit der Amplitude $\widehat{u}_E = 1\ V$
Phasenverschiebung : $\varphi_E = 0°$.

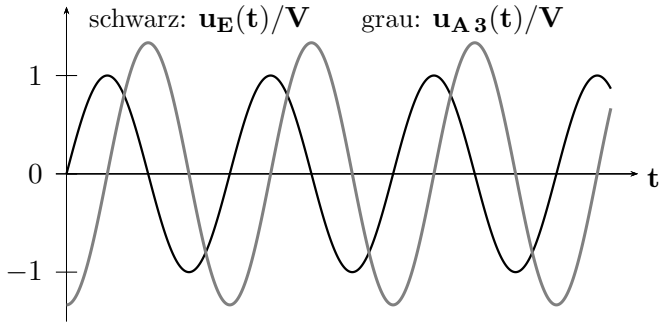
Ausgangsspannung: $u_{A\,2}(t)$
Amplitude $\widehat{u}_{A\,2} = 1.1926\ V \mathrel{\widehat{=}} 1.53\ dB$
Phasenverschiebung: $\varphi_2 = -26.57°$



Zeitfunktionen für $\omega_3 = 10\,000\ \frac{1}{sec}$
im Zeitbereich $0 \le t \le 2.531\ ms$

Eingangsspannung: $u_E(t)$
mit der Amplitude $\widehat{u}_E = 1\ V$
Phasenverschiebung : $\varphi_E = 0°$.

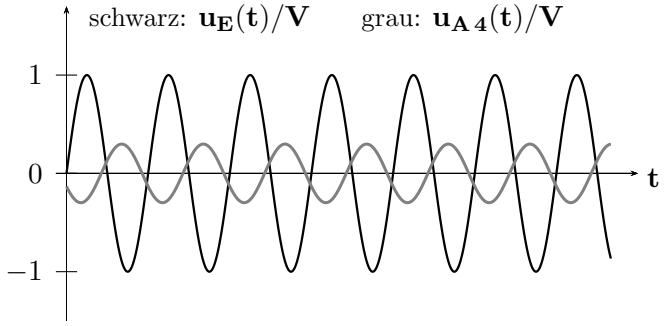
Ausgangsspannung: $u_{A\,3}(t)$
Amplitude $\widehat{u}_{A\,3} = 1.3333\ V \mathrel{\widehat{=}} 2.50\ dB$
Phasenverschiebung: $\varphi_3 = -90.00°$



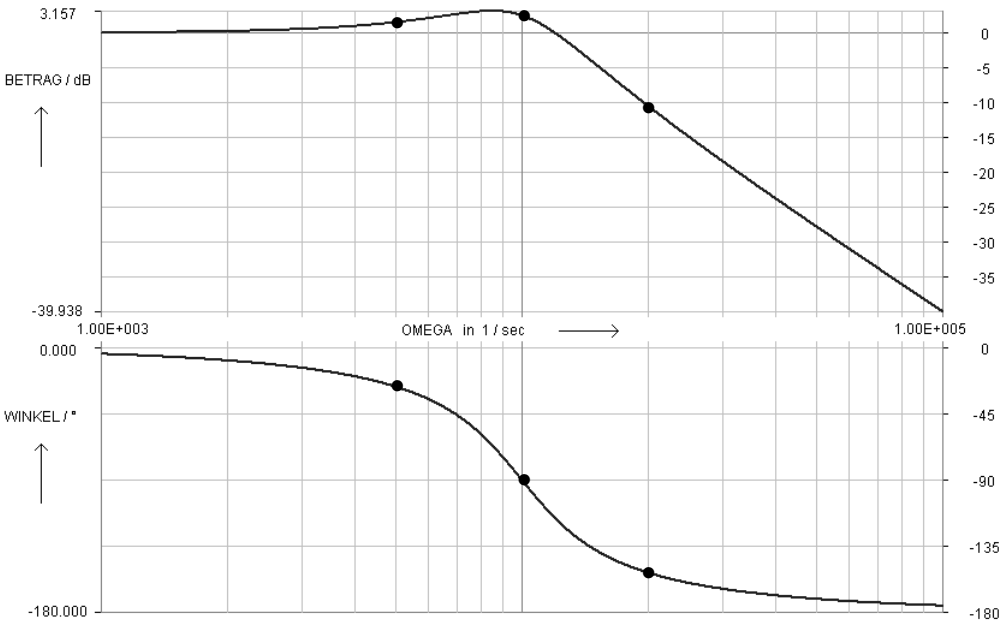
Zeitfunktionen für $\omega_4 = 20\,000\ \frac{1}{sec}$
im Zeitbereich $0 \le t \le 2.531\ ms$

Eingangsspannung: $u_E(t)$
mit der Amplitude $\widehat{u}_E = 1\ V$
Phasenverschiebung : $\varphi_E = 0°$.

Ausgangsspannung: $u_{A\,4}(t)$
Amplitude $\widehat{u}_{A\,4} = 0.2981\ V \mathrel{\widehat{=}} -10.51\ dB$
Phasenverschiebung: $\varphi_4 = -153.44°$



Im Bode-Diagramm zum betrachteten Beispiel sind die betrachteten Kreisfrequenzen markiert.



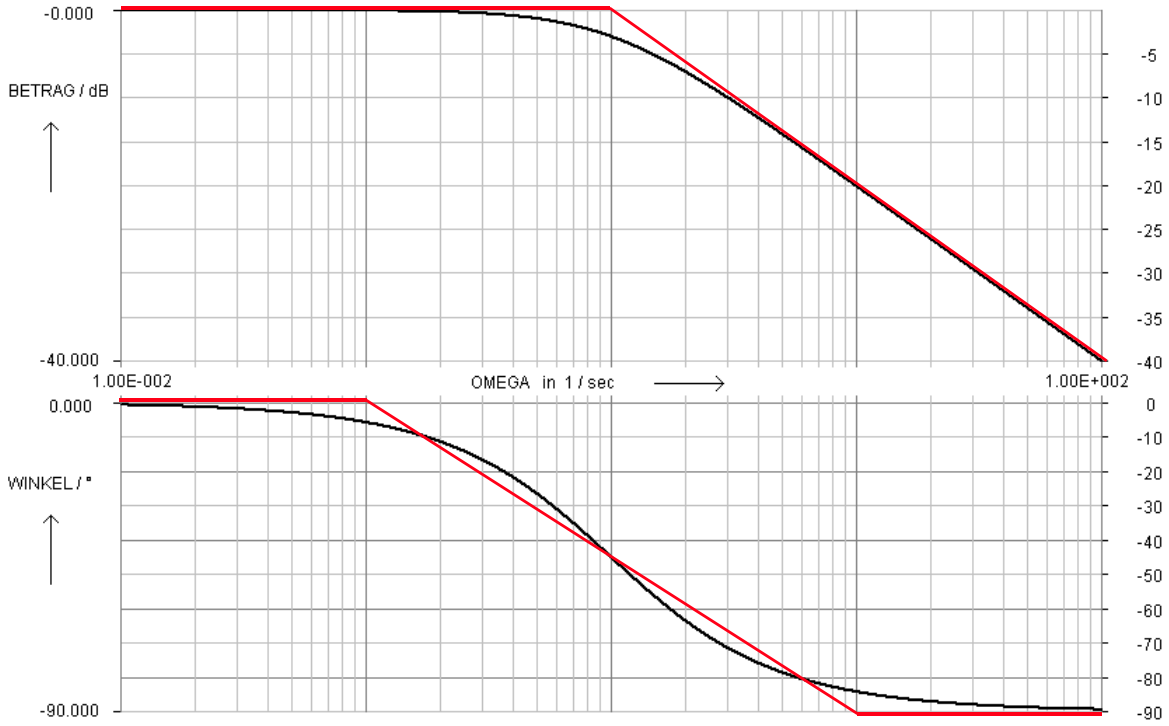
Exakte Verläufe, Polygonzug-Näherungen und Fehlerfunktionen

Das folgende Bode-Diagramm zeigt die exakten und angenäherten Frequenzgänge für Betrag und Phasenwinkel eines passiven Tiefpassfilters vom Grad n = 1 mit den beiden zueinander reziproken Kennwerten Zeitkonstante $\mathbf{T = RC = \frac{L}{R} = 1\,sec}$ und Eckkreisfrequenz $\boldsymbol{\omega_g = \frac{1}{T} = 1\ sec^{-1}}$.

Es gilt dann: $\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{s}) = \dfrac{\underline{\mathbf{U_A}}(\mathbf{s})}{\underline{\mathbf{U_E}}(\mathbf{s})} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{1 + s \cdot 1\,sec}}$; $\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{j\,\omega}) = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{1 + j\,\omega \cdot 1\,sec}}$.

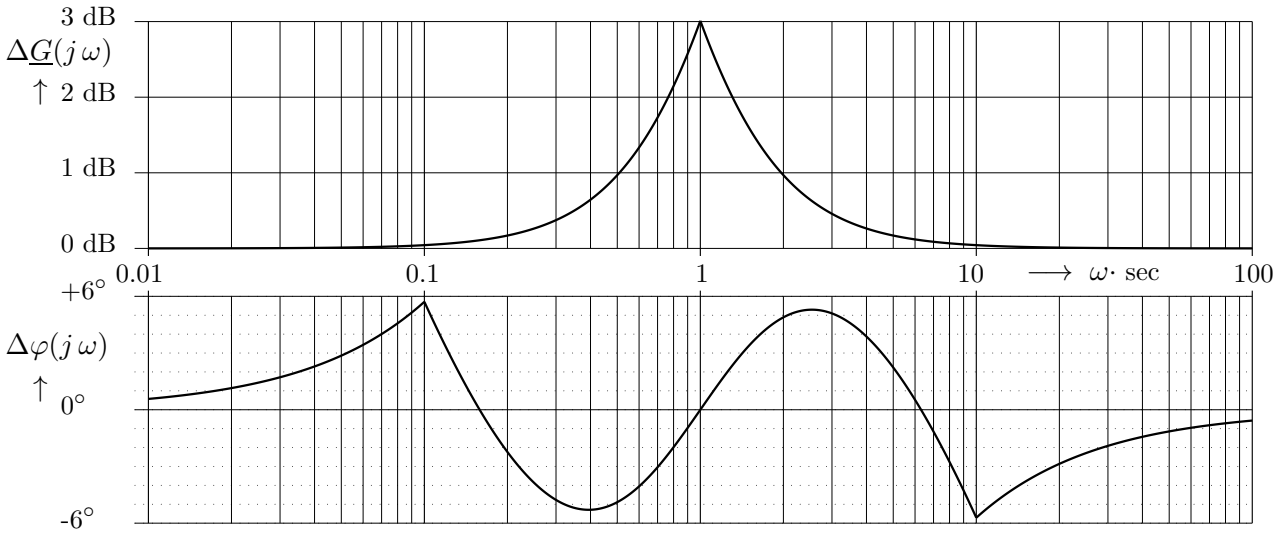
Diese (nur bei Pol- und Nullstellen auf der reellen Achse anwendbare) vereinfachte Art der Darstellung zur Annäherung der Frequenzgänge bezeichnet man wahlweise als

- geknickten Geradenzug ,
- Polygonzug-Näherung oder als
- asymptotische Näherung.



Die Fehler d.h. die Differenzen zwischen den Werten der Polygonzug-Näherungen und den exakten Werten sind im folgenden Bild dargestellt.

Im oberen Bildteil gilt für den Betrag: $\boldsymbol{\Delta\underline{G}(j\,\omega) = |\underline{G}_{polygon}(j\,\omega)| - |\underline{G}_{exakt}(j\,\omega)|}$



Im unteren Bildteil gilt für den Phasenwinkel: $\boldsymbol{\Delta\varphi(j\,\omega) = \varphi_{polygon}(j\,\omega) - \varphi_{exakt}(j\,\omega)}$

Systematische Ermittlung der Grenz- oder Eck(kreis-)frequenz $\omega_g = 2\pi f_g > 0$

Diese Kenngröße ist wichtig bei allen Pol- und Nullstellen auf der reellen Achse der s-Ebene.

Die Faktoren im Zähler oder Nenner der Übertragungs-Funktion $\underline{G}(s)$ schreibt man vorteilhaft zunächst in der Form $\underline{F}(s) = (1 + s\,T)$.

Bei technischen Frequenzen, d.h. für den eingeschwungenen Zustand erhält man daraus für $s = j\,\omega$ den komplexen Ausdruck

$$\underline{F}(j\,\omega) = (1 + j\,\omega\,T) = (\mathrm{Re}\{\underline{F}(j\,\omega)\} + j\,\mathrm{Im}\{\underline{F}(j\,\omega)\}) \ ,$$

der bei sehr tiefen Frequenzen $\omega \to 0$ den Wert $1 \mathrel{\widehat{=}} 0\,\mathrm{dB}$ ergibt, und dadurch das Zeichnen des Bode-Diagramms erheblich erleichtert.

Als Grenzkreisfrequenz $\boxed{\omega_g > 0}$ bezeichnet man die Kreisfrequenz, bei der gilt

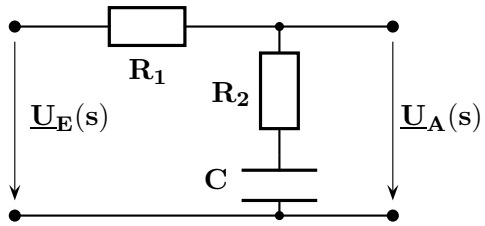
$$\boxed{|\mathrm{Re}\{\underline{F}(j\,\omega_g)\}| = |\mathrm{Im}\{\underline{F}(j\,\omega_g)\}|} \ .$$

Ü 29, Ü 30

Daraus folgt $1 = \omega_g\,|T|$ und man erhält das wichtige Ergebnis $\boxed{\omega_g = \frac{1}{|T|}}$.

Beispiele zur Verstärkung im eingeschwungenen Zustand und zum Bode-Diagramm

1.) Ermitteln Sie die Übertragungs-Funktion $\underline{G}_1(s) = \underline{U}_A(s)/\underline{U}_E(s)$ und zeichnen Sie das Bode-Diagramm mit den üblichen asymptotischen Näherungen als Polygonzüge auf der nächsten Seite ein.



$R_1 = 9.99\,\mathrm{M\Omega}$; $R_2 = 10\,\mathrm{k\Omega}$; $C = 1\,\mathrm{nF}$

Lösung: $T_1 = R_2 C = 10^{-5}\,\mathrm{sec}$; $T_2 = (R_1 + R_2)C = 10^{-2}\,\mathrm{sec}$

$\underline{G}_1(s) = \frac{\underline{U}_A(s)}{\underline{U}_E(s)} = \underline{\qquad\qquad\qquad} = \underline{\qquad\qquad\qquad}$

$\underline{G}_1(j\,\omega) = \underline{\qquad\qquad\qquad} = \underline{\qquad\qquad\qquad} = \underline{\qquad\qquad\qquad}$

und erhält so $\omega_{g1} = \frac{1}{T_1} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \omega_{g2} = \frac{1}{T_2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

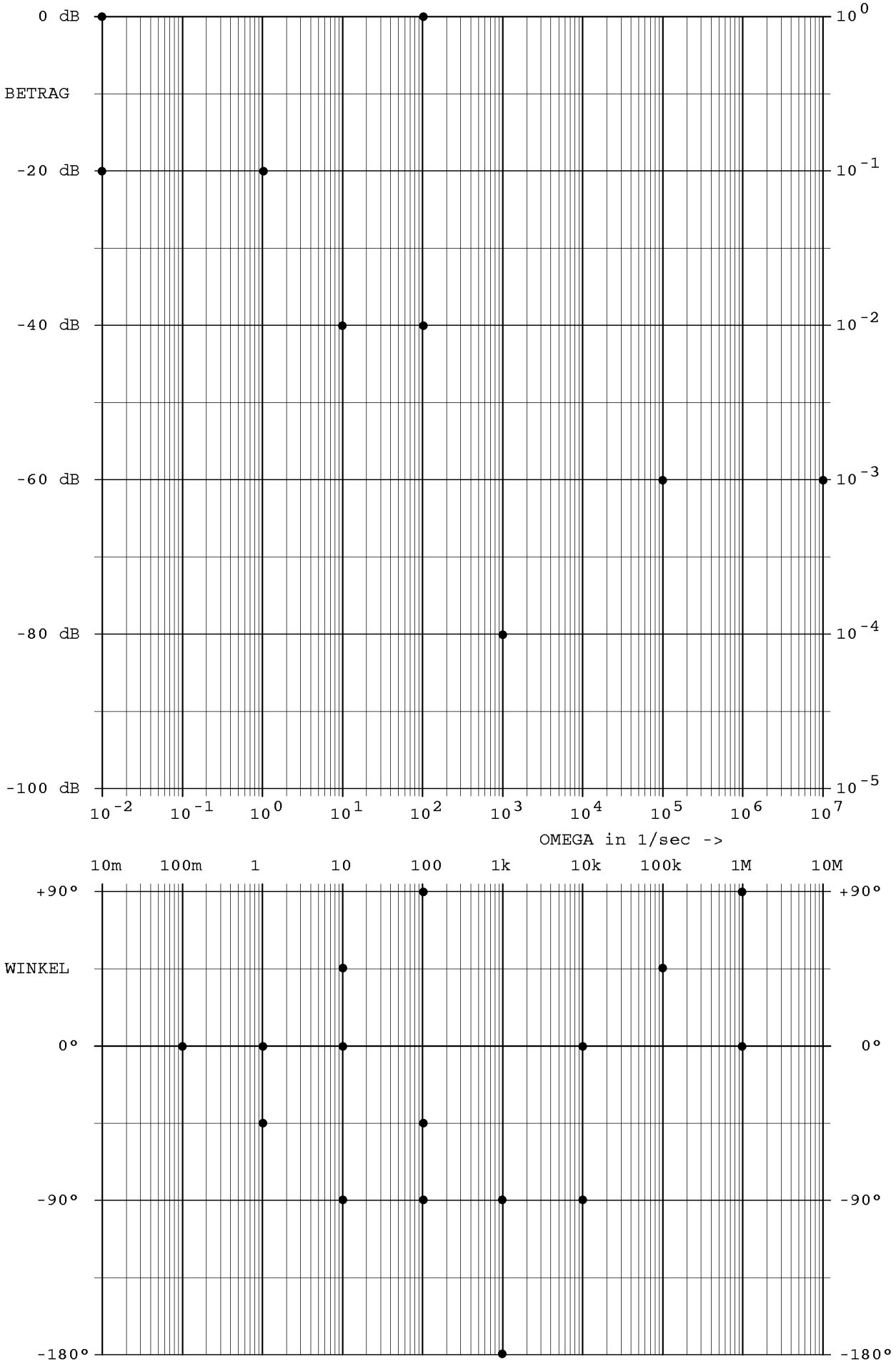
$|\underline{G}(j\,\omega = 0)| = \qquad \widehat{=} \qquad \mathrm{dB}$; $|\underline{G}(j\,\omega \to \infty)| = \qquad \widehat{=} \qquad \mathrm{dB}$

2.) Formen Sie $\underline{G}_2(s) = \frac{\underline{U}_A(s)}{\underline{U}_E(s)} = \frac{100\,\frac{1}{\mathrm{sec}^2} \cdot (s + 10\,\frac{1}{\mathrm{sec}})}{(s + 1\,\frac{1}{\mathrm{sec}}) \cdot (s + 100\,\frac{1}{\mathrm{sec}})^2}$ um und zeichnen Sie das Bode-Diagramm auf der nächsten Seite mit den üblichen Näherungen als Polygonzüge ein.

$\underline{G}_2(s) = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$

$\underline{G}_2(s) = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$

Bode-Diagramme zu den Beispielen auf Seite 52



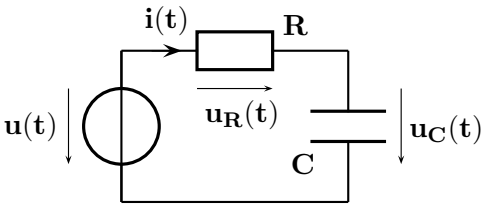
5 Berechnung des Zeitverhaltens linearer, analoger Systeme

Zunächst werden in diesem Kapitel die wichtigsten Eingangssignale und die zugehörigen Systemreaktionen besprochen. Danach folgen die Erklärungen zu drei unterschiedlichen Methoden zur Berechnung des Zeitverhaltens.

5.1 Durch Lösen der Differenzialgleichung (DGL)

5.1.1 Differenzialgleichungen 1. Ordnung

DGL einfacher Netzwerke 1. Ordnung mit Tiefpass-Verhalten:



Gesucht: DGL für $\mathbf{u_C(t)}$

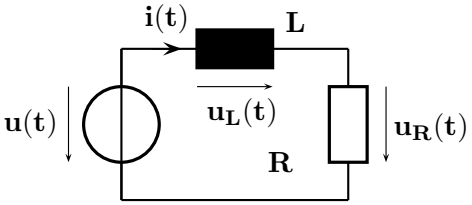
MGL: $\mathbf{u_R(t) + u_C(t) = u(t) = u_C(t) + R \cdot i(t)}$

$\mathbf{i(t) = C \cdot u'_C(t)}$ aus $\mathbf{u_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t)\, dt}$

$\mathbf{u_C(t) + RC \cdot u'_C(t) = u(t)}$

Normalform: $\boxed{\mathbf{u'_C(t) + \frac{1}{RC} \cdot u_C(t) = \frac{1}{RC} \cdot u(t)}}$

Zeitkonstante: $\mathbf{RC = \tau_C}$



Gesucht: DGL für $\mathbf{u_R(t)}$

MGL: $\mathbf{u_R(t) + u_L(t) = u(t) = u_R(t) + L \cdot i'(t)}$

$\mathbf{i(t) = \frac{u_R(t)}{R}}$; $\mathbf{i' = \frac{u'_R(t)}{R}}$

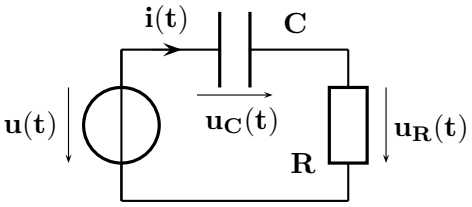
$\mathbf{u_R(t) + \frac{L}{R} \cdot u'_R(t) = u(t)}$

Normalform: $\boxed{\mathbf{u'_R(t) + \frac{R}{L} \cdot u_R(t) = \frac{R}{L} \cdot u(t)}}$

Zeitkonstante: $\mathbf{\frac{L}{R} = \tau_L}$

Beide DGL sind von 1. Ordnung, da die Netzwerke je einen Energiespeicher enthalten und von gleicher Bauform, da die Netzwerke Tiefpass-Verhalten vom 'Eingang' zum 'Ausgang' besitzen.

DGL einfacher Netzwerke 1. Ordnung mit Hochpass-Verhalten:



Gesucht: DGL für $\mathbf{u_R(t)}$

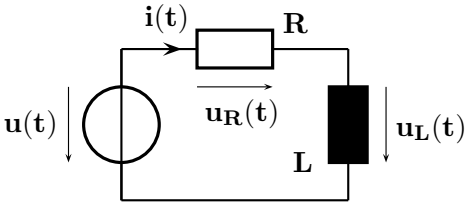
MGL: $\mathbf{u_R(t) + u_C(t) = u(t) = u_R(t) + \frac{1}{C} \int i(t)\, dt}$

$\mathbf{i(t) = \frac{u_R(t)}{R}}$

$\mathbf{u_R(t) + \frac{1}{RC} \int u_R(t)\, dt = u(t)}$

Normalform: $\boxed{\mathbf{u'_R(t) + \frac{1}{RC} \cdot u_R(t) = u'(t)}}$

Zeitkonstante: $\mathbf{RC = \tau_C}$



Gesucht: DGL für $\mathbf{u_L(t)}$

MGL: $\mathbf{u_L(t) + u_R(t) = u(t) = u_L(t) + i(t) \cdot R}$

$\mathbf{i(t) = \frac{1}{L} \int u_L(t)\, dt}$

$\mathbf{u_L(t) + \frac{R}{L} \int u_L(t)\, dt = u(t)}$

Normalform: $\boxed{\mathbf{u'_L(t) + \frac{R}{L} \cdot u_L(t) = u'(t)}}$

Zeitkonstante: $\mathbf{\frac{L}{R} = \tau_L}$

Beide DGL sind von 1. Ordnung, da die Netzwerke je einen Energiespeicher enthalten und von gleicher Bauform, da die Netzwerke Hochpass-Verhalten vom 'Eingang' zum 'Ausgang' besitzen.

Gemeinsame, allgemeine Darstellung für alle DGL 1. Ordnung in Normalform:

$$\boxed{\mathbf{y' + q \cdot y = r\ ;} \qquad \mathbf{q = \frac{1}{\tau}}}$$

Bei der Lösung der DGL 1. Ordnung geht man von der allgemeinen Darstellung der Normalform aus.

$$\mathbf{y' + q \cdot y = r}$$

Die 'rechte Seite' der DGL $\mathbf{r}$ wird auch 'Störfunktion' genannt und beschreibt die äußere(n) Quelle(n), die das betrachtete Netzwerk erregen.

Die Lösung der DGL erfolgt unter Verwendung eines geeigneten Lösungsansatzes in zwei Schritten:

1. Lösung der homogenen DGL: $\mathbf{y' + q \cdot y = 0}$ (allgemeine Lösung)
   Sie beschreibt das Netzwerkverhalten ohne äußere Quellen (deshalb mit $\mathbf{r = 0}$).
2. Lösung der inhomogenen DGL: $\mathbf{y' + q \cdot y = r}$ (spezielle Lösung)
   Sie beschreibt das Netzwerkverhalten inklusive der äußeren Quelle(n).

Die gesuchte vollständige Lösung $\mathbf{y}$ ergibt sich unter Berücksichtigung des Anfangswertes aus der Summe der allgemeinen Lösung $\mathbf{y_h}$ der homogenen DGL und einer speziellen Lösung $\mathbf{y_s}$ der inhomogenen DGL:

$$\mathbf{y = y_h + y_s}$$

Die allgemeine Lösung d.h. die Lösung der homogenen DGL findet man durch den Ansatz

$$\mathbf{y_h = A \cdot e^{\lambda t}} \quad \text{mit der zugehörigen Ableitung} \quad \mathbf{y_h' = \lambda \cdot A \cdot e^{\lambda t}}.$$

Beides wird eingesetzt: $\mathbf{y_h' + q \cdot y_h = \lambda \cdot A \cdot e^{\lambda t} + q \cdot A \cdot e^{\lambda t} = (\lambda + q) \cdot A \cdot e^{\lambda t} = 0}$

Die CHARAKTERISTISCHE GLEICHUNG, die alle Informationen über das dynamische Verhalten des betrachteten Netzwerks enthält, besitzt bei DGL 1. Ordnung immer eine reelle Lösung:
Für den reellen Eigenwert λ wird sie gleich Null. $\mathbf{\lambda + q = 0} \implies \mathbf{\lambda = -q}$

Mit diesem Ergebnis erhält man als allgemeine Lösung $\mathbf{y_h = A \cdot e^{-q \cdot t} = A \cdot e^{-t/\tau}}$

Als Folge des reellen Eigenwertes ergibt sich als EIGENBEWEGUNG immer eine Exponentialfunktion, deren Verhalten durch die Zeitkonstante $\mathbf{\tau = \frac{1}{q}}$ charakterisiert wird.

Betrachtet man passive, technische Anordnungen mit Widerständen, realen Spulen und realen Kondensatoren, ist immer mindestens ein ohmscher Widerstand $\mathbf{R > 0}$ vorhanden, der Energie aufzehrt und somit zu abklingenden Zeitfunktionen führt.

Dann gilt: Ist $\mathbf{r}$ ein Gleichsignal ($\mathbf{U_0}$, $\mathbf{I_0}$) oder ein periodisches Wechselsignal, stellt sich nach dem Abklingen der Ausgleichsvorgänge ein neuer stationärer Zustand ein.

Die Funktion, die diesen neuen eingeschwungenen Zustand beschreibt, ist eine spezielle Lösung $\mathbf{y_s}$ der inhomogenen DGL.

Für die spezielle Lösung d.h. die Lösung der inhomogenen DGL kann man auch abhängig von der Bauform der Störfunktion $\mathbf{r}$ die in der Tabelle zusammengestellten Ansätze verwenden.

Störfunktion, rechte Seite der DGL $\mathbf{r}$	Ansatz für die spezielle Lösung $\mathbf{y_s}$
$\mathbf{k}$	$\mathbf{K}$
$\mathbf{k \cdot e^{\alpha t}}$, $\alpha \neq \lambda$ (Eigenwert) $\mathbf{k \cdot e^{\lambda t}}$, λ: Eigenwert	$\mathbf{K \cdot e^{\alpha t}}$ $\mathbf{K \cdot t \cdot e^{\lambda t}}$
$\mathbf{a_n \cdot t^n}$ $\mathbf{a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + \ldots + a_n \cdot t^n}$	$\mathbf{A_0 + A_1 \cdot t + A_2 \cdot t^2 + \ldots + A_n \cdot t^n}$ $\mathbf{A_0 + A_1 \cdot t + A_2 \cdot t^2 + \ldots + A_n \cdot t^n}$
$\mathbf{k_s \cdot \sin(mt)}$ $\mathbf{k_s \cdot \cos(mt)}$ $\mathbf{k_s \cdot \sin(mt) + k_c \cdot \cos(mt)}$	$\mathbf{K_1 \cdot \sin(mt) + K_2 \cdot \cos(mt) = K \cdot \sin(mt + \varphi)}$ $\mathbf{K_1 \cdot \sin(mt) + K_2 \cdot \cos(mt) = K \cdot \sin(mt + \varphi)}$ $\mathbf{K_1 \cdot \sin(mt) + K_2 \cdot \cos(mt) = K \cdot \sin(mt + \varphi)}$

1. Beispiel zur DGL 1. Ordnung

Lösen Sie die DGL eines RC-Tiefpasses dessen Kapazität auf $\mathbf{u_C(t=0) = U_{C0}}$ vorgeladen ist für $\mathbf{u(t) = U_0}$; $\tau = \mathbf{RC}$.
Rechnen Sie erst allgemein und dann mit den Werten $\mathbf{U_0 = 10\,V}$; $\tau = \mathbf{2\,sec}$; $\mathbf{U_{C0} = 5\,V}$.

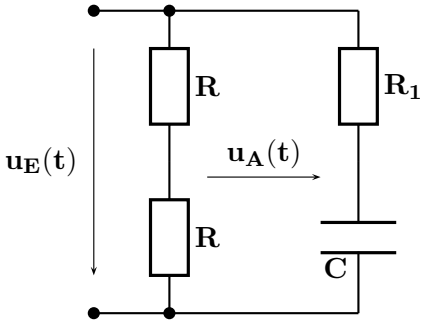
---

2. Beispiel zur DGL 1. Ordnung

Gegeben: $\mathbf{u_E(t)} = \begin{cases} \mathbf{1\,V} & : \ \mathbf{t > 0} \\ \mathbf{0\,V} & : \ \mathbf{sonst} \end{cases}$

$\tau = \mathbf{R_1 C = 1\,sec}$

Gesucht: Gleichung und Verlauf von $\mathbf{u_A(t)}$ ohne DGL.



---

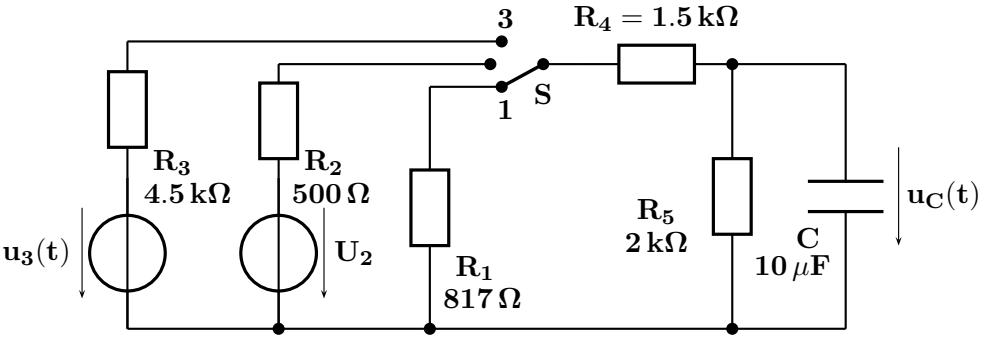
3. Beispiel zur DGL 1. Ordnung

Gegeben ist das dargestellte Netzwerk, das mit den folgenden Spannungen betrieben wird.

$$\mathbf{U_2 = 50\,V}\ ; \quad \mathbf{u_3(t) = \hat{u}_3 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 50\,Hz \cdot t)}\ ; \quad \mathbf{\hat{u}_3 = 100\,V}$$

Der Schalter **S** wird nach der Tabelle von Position 1 über Position 2 nach Position 3 bewegt.

Position des Schalters **S**	im Zeitbereich
1 , unten	$\mathbf{-\infty < t < 0}$
2 , Mitte	$\mathbf{0 \le t \le 20\,msec}$
3 , oben	$\mathbf{t > 20\,msec}$



a.) Ermitteln Sie die Spannung $\mathbf{u_C(t = 0^-)}$

b.) Berechnen Sie die Zeitfunktion von $\mathbf{u_C(t)}$ für $\mathbf{0 \le t \le 20\,msec}$.

c.) Zeichnen Sie den Verlauf von $\mathbf{u_C(t)}$ nach b.) [Zeitachse: $\mathbf{0 \le t \le 80\,msec}$]

d.) Berechnen Sie $\mathbf{u_C(t)}$ für $\mathbf{20\,msec \le t \le 80\,msec}$

e.) Ergänzen Sie nun die Zeichnung mit $\mathbf{u_C(t)}$ nach d.)

---

4. Beispiel zur DGL 1. Ordnung

a.) Zu berechnen ist der Zeitverlauf des Stromes $\mathbf{i(t)}$, den ein Motor mit der Serienersatzschaltung $\mathbf{L = 0.6358\,H}$; $\mathbf{R = 10\,\Omega}$ aufnimmt, wenn er an die 230 V / 50 Hz- Netzspannung $\mathbf{u_N(t)}$ angeschaltet wird.
Der Zeitpunkt der Betätigung des Schalters wird durch den Winkel φ_0 erfasst.

$$\mathbf{u_N(t)} = \begin{cases} \mathbf{230 \cdot \sqrt{2}\,V \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)} & : \ \mathbf{t > 0} \\ \mathbf{0\,V} & : \ \mathbf{sonst} \end{cases}$$

b.) Bei welchem Wert von φ_0 wird der Spitzenstrom maximal?

5. Beispiel zur DGL 1. Ordnung

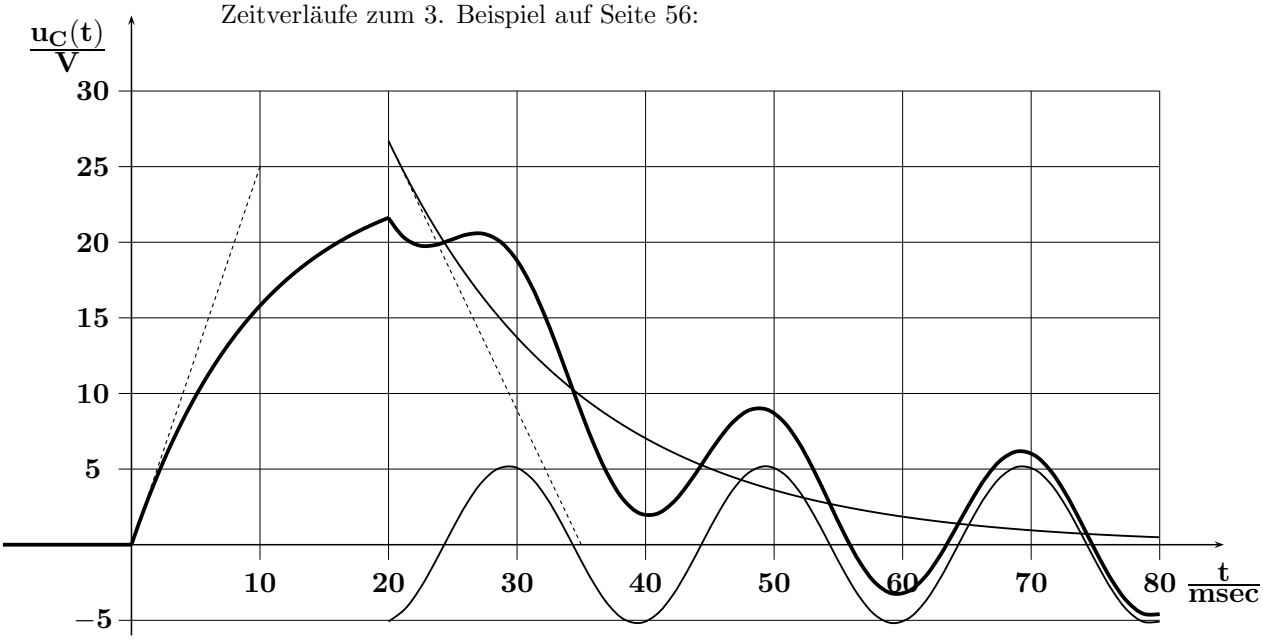
Am Eingang eines RC-Tiefpasses liegt die Spannung $\mathbf{u_E(t)} = \begin{cases} \mathbf{U_0} & : \ \mathbf{t < 0} \\ \mathbf{U_0 \cdot (1 - t/\tau)} & : \ \mathbf{0 \le t \le \tau} \\ \mathbf{0\,V} & : \ \mathbf{sonst} \end{cases}$

a.) Zeichnen Sie das Schaltbild ($\tau = \mathbf{RC}$) und den Verlauf der Eingangsspannung.

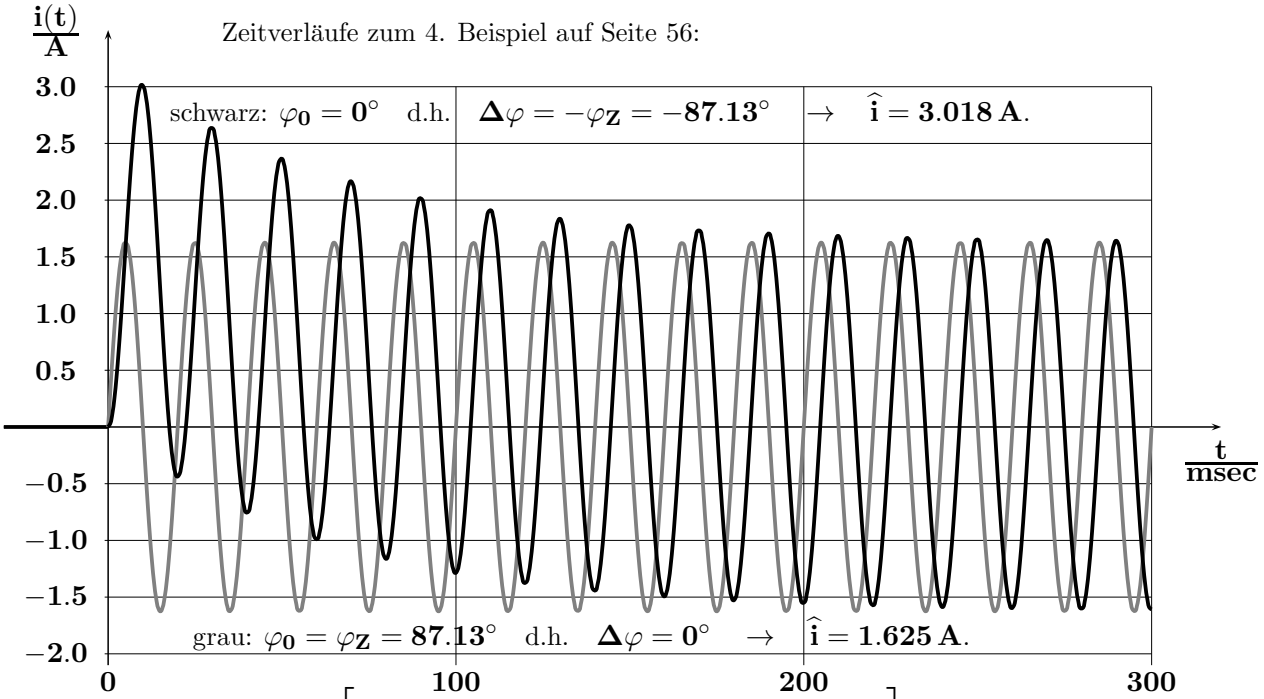
b.) Stellen Sie die DGL für den Strom $\mathbf{i(t)}$ auf und lösen Sie diese.

c.) Skizzieren Sie den Verlauf von $\mathbf{u_R(t)}$.

Zeitverläufe zum 3. Beispiel auf Seite 56:



Zeitverläufe zum 4. Beispiel auf Seite 56:



Es gilt: $\mathbf{i(t) = 1.625\,A} \left[\underbrace{\mathbf{\sin(\omega t + \varphi_0 - \varphi_Z)}}_{\textbf{stationärer Anteil}} \underbrace{\mathbf{- e^{-t/\tau} \cdot \sin(\varphi_0 - \varphi_Z)}}_{\textbf{abklingender Anteil}} \right]$

Berechnung und Darstellung von $\mathbf{i(t)}$ mit dem Programm **DGL**: $\mathbf{y} \mathrel{\widehat{=}} \frac{\mathbf{i(t)}}{\mathbf{A}}$; $\mathbf{x} \mathrel{\widehat{=}} \frac{\mathbf{u(t)}}{\mathbf{V}}$

$\mathbf{0.6358 \cdot y' + 10 \cdot y = 1 \cdot x}$ mit $\mathbf{x = 325 \cdot e^{0t} \cdot \sin(314 \cdot t + \varphi_0)}$; Alle Anfangswerte = Null

Ermittlung der Zeitfunktion bei Netzwerken 1. Ordnung ohne Aufstellen und Lösen der DGL

Da bei allen Ausgleichsvorgängen in Systemen vom Grad n=1 grundsätzlich Exponentialfunktionen auftreten, kann man die gesuchte Zeitfunktion am Ausgang relativ einfach ermitteln, wenn sich das Eingangssignal in Sprungfunktionen zerlegen lässt.

Für steigende und auch für fallende Exponentialfunktionen gilt die folgende, hier für Spannungen angegebene allgemeine Gleichung $\mathbf{u(t) = U_{Anf} + [\,U_{End} - U_{Anf}\,] \cdot [\,1 - e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}\,]}$

die bevorzugt in der gleichwertig umgeformten Fassung verwendet wird.

$$\boxed{\mathbf{u(t) = U_{End} + [\,U_{Anf} - U_{End}\,] \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}}}$$

Bedeutung der verwendeten Formelzeichen:

$\mathbf{t_0} \mathrel{\widehat{=}}$ Zeitpunkt der betrachteten sprungförmigen Änderung des Eingangssignals

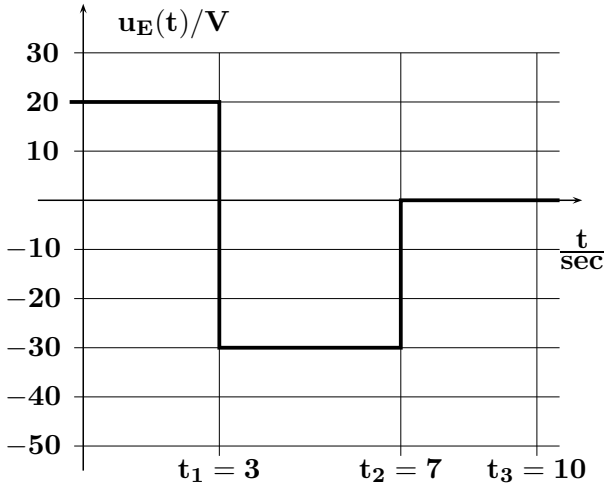
$\mathbf{U_{Anf}} \mathrel{\widehat{=}}$ Wert der Ausgangsspannung unmittelbar nach dem betrachteten Sprung.

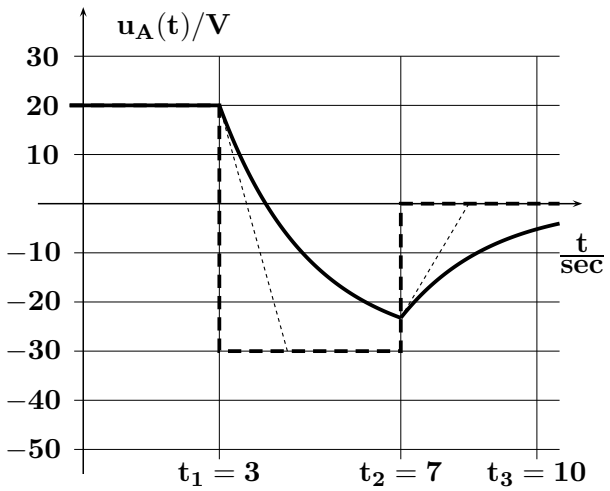
$\mathbf{U_{End}} \mathrel{\widehat{=}}$ Endwert der Ausgangsspannung, der ohne weitere Änderung der Eingangsspannung bei $\mathbf{t \to \infty}$ erreicht werden würde.

1. Beispiel:

Betrachtet wird ein passiver **TIEFPASS** nach Seite 54 mit einer Zeitkonstante $\tau = \mathbf{2\,sec}$.

Berechnen Sie $\mathbf{u_A(t)}$ für die Zeitpunkte $\mathbf{t_1^-}$; $\mathbf{t_1^+}$; $\mathbf{t_2^-}$; $\mathbf{t_2^+}$; $\mathbf{t_3}$.





Für $\mathbf{t < t_1 = 3\,sec}$ gilt:

$\mathbf{u_A(t_1^-) = 20\,V}$
$\mathbf{u_A(t_1^+) = 20\,V}$
$\mathbf{u_C}$ oder $\mathbf{i_L}$ verläuft immer stetig!

Für $\mathbf{t_1 = 3\,sec \le t \le t_2 = 7\,sec}$ gilt:

$\mathbf{U_{Anf} = 20\,V}$; $\mathbf{U_{End} = -30\,V}$
$\mathbf{u_A(t) = -30\,V + (20 - [-30])\,V \cdot e^{-\frac{t-3\,sec}{2\,sec}}}$
$\mathbf{u_A(t_2^-) = -30\,V + 50\,V \cdot e^{-2} = -23.23\,V}$
$\mathbf{u_A(t_2^+) = -23.23\,V}$
$\mathbf{u_C}$ oder $\mathbf{i_L}$ verläuft immer stetig!

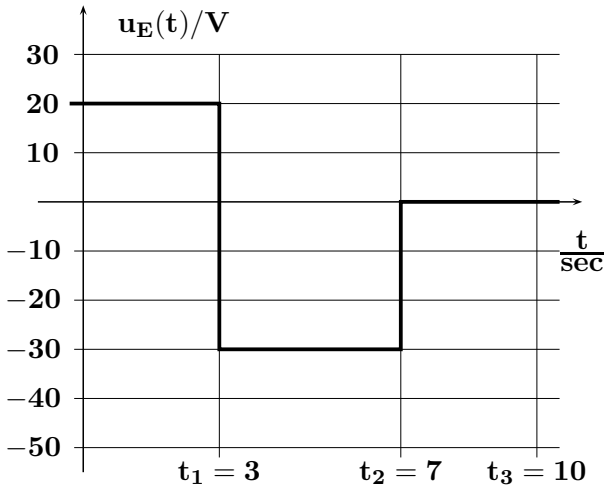
Für $\mathbf{t > t_2 = 7\,sec}$ gilt:

$\mathbf{U_{Anf} = -23.23\,V}$; $\mathbf{U_{End} = 0\,V}$
$\mathbf{u_A(t) = 0\,V + (-23.23\,V - 0\,V) \cdot e^{-\frac{t-7\,sec}{2\,sec}}}$
$\mathbf{u_A(t_3) = -23.23\,V \cdot e^{-1.5} = -5.184\,V}$

2. Beispiel:

Betrachtet wird ein passiver **HOCHPASS** nach Seite 54 mit einer Zeitkonstante $\tau = \mathbf{2\,sec}$.

Berechnen Sie $\mathbf{u_A(t)}$ für die Zeitpunkte $\mathbf{t_1^-}$; $\mathbf{t_1^+}$; $\mathbf{t_2^-}$; $\mathbf{t_2^+}$; $\mathbf{t_3}$.



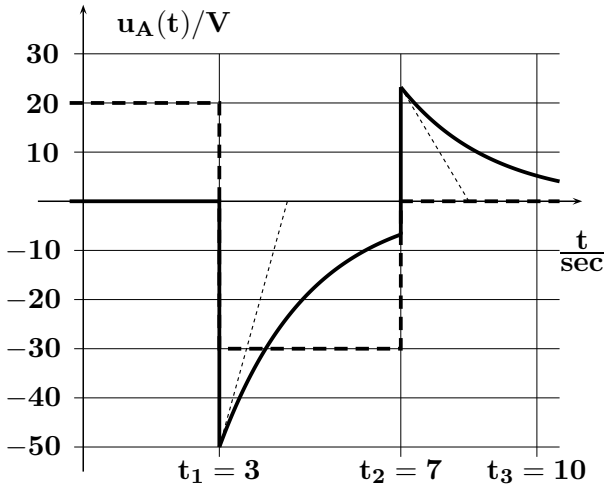
Für $\mathbf{t < t_1 = 3\,sec}$ gilt:

$\mathbf{u_A(t_1^-) = 0\,V}$

HP sperrt Gleichspannung!

$\mathbf{u_A(t_1^+) = 0\,V - 50\,V = -50\,V}$

Sprung wird voll zum Ausgang übertragen!



Für $\mathbf{t_1 = 3\,sec \le t \le t_2 = 7\,sec}$ gilt:

$\mathbf{U_{Anf} = -50\,V}$; $\mathbf{U_{End} = 0\,V}$

$\mathbf{u_A(t) = 0\,V + (-50 + 0)\,V \cdot e^{-\frac{t-3\,sec}{2\,sec}}}$

$\mathbf{u_A(t_2^-) = -50\,V \cdot e^{-2} = -6.767\,V}$

$\mathbf{u_A(t_2^+) = -6.767\,V + 30\,V = 23.23\,V}$

Sprung wird voll zum Ausgang übertragen!

Für $\mathbf{t > t_2 = 7\,sec}$ gilt:

$\mathbf{U_{Anf} = 23.23\,V}$; $\mathbf{U_{End} = 0\,V}$

$\mathbf{u_A(t) = 0\,V + (23.23\,V - 0\,V) \cdot e^{-\frac{t-7\,sec}{2\,sec}}}$

$\mathbf{u_A(t_3) = 23.23\,V \cdot e^{-1.5} = 5.184\,V}$

Hilfslinie zum Zeichnen von Exponentialfunktionen

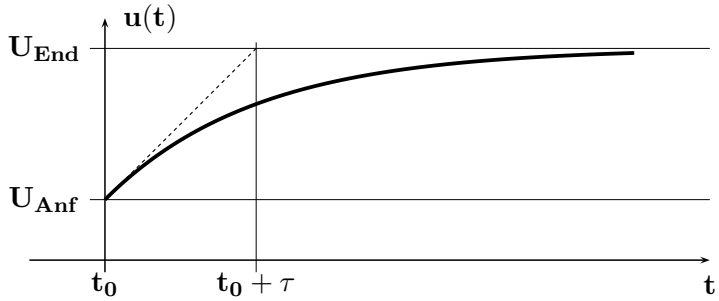
Die Zeitfunktion $\mathbf{u(t) = U_{End} + [\,U_{Anf} - U_{End}\,] \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}}$ nach Seite 58 beginnt bei $\mathbf{U_{Anf}}$ und verläuft asymptotisch mit der Zeitkonstante τ gegen $\mathbf{U_{End}}$.

Berechnet man ihre Ableitung zum Zeitpunkt $\mathbf{t = t_0^+}$ erhält man

$$\boxed{\left.\frac{\mathbf{du(t)}}{\mathbf{dt}}\right|_{\mathbf{t=t_0^+}} = -\frac{\mathbf{U_{Anf} - U_{End}}}{\tau} = \frac{\mathbf{U_{End} - U_{Anf}}}{\tau}}\,.$$

Deutet man das Ergebnis als ein Steigungsdreick mit
$\mathbf{\Delta u = U_{End} - U_{Anf}}$ und $\mathbf{\Delta t = \tau}$ kann man im Punkt $[\,\mathbf{t = t_0^+}$; $\mathbf{u = U_{Anf}}\,]$ diese Anfangssteigung einzeichnen, die die Tangente an die Zeitfunktion bildet.

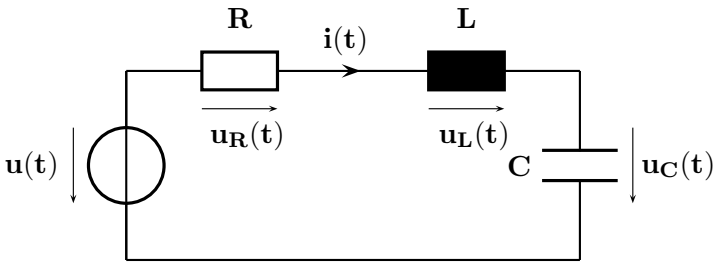
Auf den Seiten 57, 58 und 59 sind diese Hilfslinien in den Bildern dünn eingetragen.



Ü 31 - Ü 33
Ü 38 - Ü 40

5.1.2 Differenzialgleichungen 2. Ordnung

Passiver Tiefpass vom Grad n=2



Gesucht: DGL für $\mathbf{u_C(t)}$

MGL: $\mathbf{u_C(t) + u_R(t) + u_L(t) = u(t)}$

$\mathbf{u_C(t) + R \cdot i(t) + L \cdot i'(t) = u(t)}$

Aus $\mathbf{u_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t)\, dt}$ erhält man

$\mathbf{i(t) = C \cdot u'_C(t)}$; $\mathbf{i'(t) = C \cdot u''_C(t)}$.

$\mathbf{u_C(t) + RC \cdot u'_C(t) + LC \cdot u''_C(t) = u(t)}$

Die Normalform der DGL lautet: $\boxed{\mathbf{u''_C(t) + \frac{R}{L} \cdot u'_C(t) + \frac{1}{LC} \cdot u_C(t) = \frac{1}{LC} \cdot u(t)}}$

Die DGL ist von 2.Ordnung, da das Netzwerk zwei unabhängige, verschiedene Energiespeicher enthält. Bei kleinen Werten von R (d.h. bei einer großen Güte des Serienresonanzkreises) ist das Netzwerk schwingungsfähig, da dann die noch vorhandene Energie abwechselnd im Magnetfeld der Induktivität L und im elektrischen Feld der Kapazität C gespeichert wird.

Zur Lösung verwendet man die allgemeine Darstellung der DGL 2. Ordnung in der Normalform.

$$\boxed{\mathbf{y'' + p \cdot y' + q \cdot y = r}}$$

Die 'rechte Seite' der DGL $\mathbf{r}$ wird auch 'Störfunktion' genannt und beschreibt die äußere(n) Quelle(n), die das betrachtete Netzwerk erregen.

Die Lösung der DGL erfolgt analog zum Vorgehen auf Seite 55 wieder in zwei Schritten:

1. Lösung der homogenen DGL: $\mathbf{y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0}$ (allgemeine Lösung)
   Sie beschreibt das Netzwerkverhalten ohne äußere Quellen (deshalb mit $\mathbf{r = 0}$).
2. Lösung der inhomogenen DGL: $\mathbf{y'' + p \cdot y' + q \cdot y = r}$ (spezielle Lösung)
   Sie beschreibt das Netzwerkverhalten inklusive der äußeren Quelle(n).

Die gesuchte vollständige Lösung $\mathbf{y}$ ergibt sich unter Berücksichtigung der beiden Anfangswerte aus der Summe der allgemeinen Lösung $\mathbf{y_h}$ der homogenen DGL und einer speziellen Lösung $\mathbf{y_s}$ der inhomogenen DGL:

$$\boxed{\mathbf{y = y_h + y_s}}$$

Die allgemeine Lösung d.h. die Lösung der homogenen DGL findet man auch hier durch den Ansatz

$$\mathbf{y_h = A \cdot e^{\lambda t}} \quad \text{und damit} \quad \mathbf{y'_h = \lambda \cdot A \cdot e^{\lambda t}} \quad \text{sowie} \quad \mathbf{y''_h = \lambda^2 \cdot A \cdot e^{\lambda t}}\ .$$

Setzt man diese Ausdrücke in die DGL ein, erhält man die folgende Gleichung.

$$\mathbf{\lambda^2 \cdot A \cdot e^{\lambda t} + p \cdot \lambda \cdot A \cdot e^{\lambda t} + q \cdot A \cdot e^{\lambda t} = (\lambda^2 + p \cdot \lambda + q) \cdot A \cdot e^{\lambda t} = 0}$$

Die CHARAKTERISTISCHE GLEICHUNG, die alle Informationen über das dynamische Verhalten des betrachteten Netzwerks enthält, ist bei DGL 2. Ordnung immer eine quadratische Gleichung,

$$\mathbf{\lambda^2 + p \cdot \lambda + q = 0}$$

die für die beiden Eigenwerte λ_1 , λ_2 gleich Null wird.

Abhängig von den Werten von $\mathbf{p}$ und $\mathbf{q}$ sind für die Lösungen drei Fälle zu unterscheiden.

$$\mathbf{\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}} \quad \text{mit der Diskriminante} \quad \mathbf{D = \frac{p^2}{4} - q}$$

Fall 1 : Für $\mathbf{D > 0}$ erhält man zwei verschiedene, reelle Eigenwerte: Aperiodisches Verhalten

$$\lambda_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{D} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{D} \qquad \text{und damit} \qquad y_h = A \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + B \cdot e^{\lambda_2 \cdot t}$$

Fall 2 : Für $\mathbf{D = 0}$ erhält man zwei gleiche, reelle Eigenwerte: Aperiodischer Grenzfall

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -\frac{p}{2} \qquad \text{und damit} \qquad y_h = A \cdot e^{\lambda \cdot t} + t \cdot B \cdot e^{\lambda \cdot t}$$

Fall 3 : Für $\mathbf{D < 0}$ tritt ein konjugiert komplexes Paar von Eigenwerten auf:

$$\lambda_1 = -\frac{p}{2} + j\sqrt{-D} = \alpha + j\,\beta \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -\frac{p}{2} - j\sqrt{-D} = \alpha - j\,\beta \qquad \text{und damit}$$

$$y_h = A \cdot e^{\alpha \cdot t} \cdot \sin(\beta \cdot t) + B \cdot e^{\alpha \cdot t} \cdot \cos(\beta \cdot t) = C \cdot e^{\alpha \cdot t} \cdot \sin(\beta \cdot t + \varphi)$$

Bei $p > 0$ ist $\alpha < 0$ und die für das Abklingen der Schwingung maßgebliche Zeitkonstante T_{ab} berechnet sich aus dem Realteil zu $T_{ab} = -1/\alpha$.

Der Imaginärteil $\beta > 0$ bestimmt die Kreisfrequenz, mit der die EIGENSCHWINGUNG ausgeführt wird. Nur im Fall 3 ist das Netzwerk SCHWINGUNGSFÄHIG !

Beim Ermitteln der speziellen Lösung der inhomogenen DGL 2. Ordnung verfährt man analog, wie es auf Seite 55 für die DGL 1. Ordnung erläutert ist. Die Tabelle ist jedoch für die DGL 2. Ordnung nicht vollständig, da hier weitere Sonderfällen auftreten können.

---

1. Beispiel zur DGL 2. Ordnung

Gegebene Elementewerte zur Schaltung auf Seite 60: $R = 20\,\Omega$; $L = 1\,H$; $C = 99.01\,\mu F$.

Die Spannung $u(t)$ springt bei t = 0 vom Wert 0 V auf 1 V.

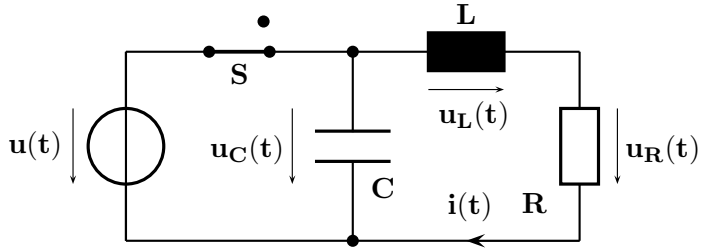
Für die beiden Anfangswerte gilt: $u_C(t = 0^+) = u_{C0} = 0\,V$; $u'_C(t = 0^+) = u'_{C0} = 0\,V/sec$.

Berechnen Sie die vollständige Zeitfunktion der Spannung $u_C(t)$ am Ausgang des Netzwerks.

---

2. Beispiel zur DGL 2. Ordnung

Der Schalter S ist zunächst für lange Zeit geschlossen und wird bei t = 0 geöffnet.



$R = 10\,\Omega$

$L = 0.5\,H$

$C = 26.667\,mF$.

$u(t) = 100\,V \cdot \sin(200\frac{t}{sec})$

a.) Berechnen Sie $i(0^-)$; $i(0^+)$; $u_c(0^-)$; $u_C(0^+)$.

Ü 41, Ü 42

b.) Berechnen Sie $\frac{di}{dt}|_{t=0^+}$; $\frac{du_C}{dt}|_{t=0^+}$.

c.) Stellen Sie die DGL für $i(t)$ für $t > 0$ in der Normalform auf und berechnen Sie die Eigenwerte. Ist das Netzwerk schwingungsfähig?

Insbesondere bei komplizierteren Netzwerken (mit vermaschten Strukturen und / oder mit mehreren Blindelementen) erfordert das Aufstellen und Lösen der DGL(n) einige Übung und Mühe.

Da solche Fälle in der Praxis gewöhnlich mit Rechnerhilfe (z.B. mit PSPICE) numerisch oder aber mit der Laplace-Transformation bearbeitet werden, wird hier auf eine weitere Vertiefung verzichtet.

5.2 Mit Hilfe der Laplace-Transformation

Durch den Übergang vom Original- oder Zeitbereich in den Frequenz- oder Bildbereich der Laplace-Transformation ergeben sich insbesondere bei der Behandlung von DGL wesentliche Vereinfachungen.

WICHTIG: Im Weiteren interessieren wir uns nur für die Zeitfunktionen im Bereich $\mathbf{t > 0}$.
Die Vergangenheit wird gegebenenfalls durch geeignete Anfangsbedingungen erfasst.

5.2.1 Laplace-Integral, Tabellen zur Laplace-Trafo, Programm LAPLACE

Mit Hilfe des uneigentlichen Laplace-Integrals

$$\boxed{\underline{\mathbf{F}}(\mathbf{s}) = \int_{\mathbf{t=0}}^{\infty} \mathbf{f(t)} \cdot \mathbf{e^{-st}dt}}$$

gelingt es, die Original- oder Zeitfunktion $\mathbf{f(t)}$ in die Bild- oder Spektralfunktion $\underline{\mathbf{F}}(\mathbf{s})$ umzurechnen.

Für den umgekehrten Weg (Ermittlung der Zeitfunktion aus der Bildfunktion) gibt es mehrere Wege. Hier wird der gebräuchlichste und einfachste Weg über die Partialbruch-Zerlegung der Bildfunktion $\underline{\mathbf{F}}(\mathbf{s})$ und die Verwendung von Tabellen zur gliedweisen Rücktransformation in den Zeitbereich besprochen.

Den Übergang vom Zeit- in den Bildbereich bezeichnet man als **Laplace-Transformation**
[symbolische Darstellung $\boxed{\underline{\mathbf{F}}(\mathbf{s}) = \mathcal{L}\{\mathbf{f(t)}\}}$; $\boxed{\underline{\mathbf{F}}(\mathbf{s}) \bullet\!\!-\!\!\circ\ \mathbf{f(t)}}$].

Den Übergang vom Bild- in den Zeitbereich nennt man **inverse Laplace-Transformation**
[symbolische Darstellung $\boxed{\mathbf{f(t)} = \mathcal{L}^{-1}\{\underline{\mathbf{F}}(\mathbf{s})\}}$; $\boxed{\mathbf{f(t)} \circ\!\!-\!\!\bullet\ \underline{\mathbf{F}}(\mathbf{s})}$].

Für den Anwender stehen umfangreiche Tabellenwerke zur Verfügung, die neben den Rechenregeln auch so genannte Korrespondenzen, d. h. Paare von Funktionen enthalten, die über die Laplace-Transformation zusammenhängen.

Die Seiten 63 und 64 enthalten Gleichungen zur Berechnung von Grenzwerten, die wichtigsten Operationen sowie eine Auswahl von Korrespondenzen der Laplace-Transformation.

5.2.2 Lösung von DGL im Bildbereich der Laplace-Transformation

Das 1. Beispiel auf Seite 56 soll nun auch im Bildbereich bearbeitet werden.

$$\mathbf{DGL:}\ \mathbf{u'_C} + \tfrac{\mathbf{1}}{\tau}\mathbf{u_C} = \tfrac{\mathbf{1}}{\tau}\mathbf{u}\ \text{ mit }\ \mathbf{u = U_0 = 10\ V};\quad \tau = \mathbf{RC = 2\ sec};\quad \mathbf{U_{C0} = 5\ V}$$

Beim Übergang in den Bildbereich und zur Lösung der DGL sind folgende Schritte erforderlich:

1. Zeitfunktionen (kleine Buchstaben) werden durch Bildfunktionen (große Buchstaben mit dem Argument s) ersetzt: $\mathbf{u_C(t) \Longrightarrow \underline{U}_C(s)}$

2. Abgeleitete Zeitfunktionen werden nach Seite 63 (Differenzieren im Zeitbereich) ersetzt:

$$\mathbf{u'_C \Longrightarrow s \cdot \underline{U}_C(s) - u_C(t = 0)}$$

Auf diese Weise wird der Anfangswert der Kondensatorspannung für t=0 berücksichtigt.

3. Da uns die Signale nur für positive Zeiten interessieren, sorgt man dafür, dass der Sprung der Spannungsquelle u von 0 V zur Zeit t=0 auf 10 V erfolgt (wenn nötig Einschaltzeitpunkt verschieben oder modifizierte Zeitachse verwenden).
Im Bildbereich entspricht dies nach Korrespondenz Nr. 2 dem Uo- fachen Einheitssprung:

$$\mathbf{u \Longrightarrow \frac{U_0}{s}}$$

4. Die DGL im Bildbereich lautet damit $\mathbf{s \cdot \underline{U}_C(s) - U_{C0} + \frac{1}{\tau}\underline{U}_C(s) = \frac{1}{\tau}\frac{U_0}{s}}$.

LAPLACE-TRANSFORMATION : Grenzwerte, Operationen, Korrespondenzen I

Grenzwertsätze für $\mathbf{f(t)}$: $\boxed{\lim\limits_{\mathbf{t\to 0^+}} \mathbf{f(t)} = \lim\limits_{\mathbf{s\to\infty}} [\, \mathbf{s}\cdot\underline{\mathbf{F}}(\mathbf{s})\,]}$ $\boxed{\lim\limits_{\mathbf{t\to\infty}} \mathbf{f(t)} = \lim\limits_{\mathbf{s\to 0}} [\, \mathbf{s}\cdot\underline{\mathbf{F}}(\mathbf{s})\,]}$

Operationen im Zeitbereich und deren Entsprechungen im Bildbereich

- Berücksichtigung einer Konstante :
  $\mathcal{L}\{\, \mathbf{K}\cdot\mathbf{f(t)}\,\} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{K}\cdot\mathcal{L}\{\,\mathbf{f(t)}\,\} = \mathbf{K}\cdot\underline{\mathbf{F}}(\mathbf{s})$
- Bildung einer Summe oder einer Differenz:
  $\mathcal{L}\{\, \mathbf{f_1(t)} \pm \mathbf{f_2(t)}\,\} \quad\Rightarrow\quad \mathcal{L}\{\,\mathbf{f_1(t)}\,\} \pm \mathcal{L}\{\,\mathbf{f_2(t)}\,\} = \underline{\mathbf{F}}_\mathbf{1}(\mathbf{s}) \pm \underline{\mathbf{F}}_\mathbf{2}(\mathbf{s})$
- Integration im Zeitbereich :
  $\mathcal{L}\{\, \int\limits_{\mathbf{0}}^{\mathbf{t}} \mathbf{f}(\tau)\mathbf{d}\tau\,\} \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{s}}\cdot\mathcal{L}\{\,\mathbf{f(t)}\,\} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{s}}\cdot\underline{\mathbf{F}}(\mathbf{s})$
- Differenzieren im Zeitbereich :
  $\mathcal{L}\{\, \frac{\mathbf{df(t)}}{\mathbf{dt}}\,\} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{s}\cdot\underline{\mathbf{F}}(\mathbf{s}) - \mathbf{f}(\mathbf{t}=\mathbf{0^+})$
  $\mathcal{L}\{\, \frac{\mathbf{d^2f(t)}}{\mathbf{dt^2}}\,\} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{s^2}\cdot\underline{\mathbf{F}}(\mathbf{s}) - \mathbf{s}\cdot\mathbf{f}(\mathbf{t}=\mathbf{0^+}) - \mathbf{f'}(\mathbf{t}=\mathbf{0^+})$
  $\mathcal{L}\{\, \frac{\mathbf{d^3f(t)}}{\mathbf{dt^3}}\,\} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{s^3}\cdot\underline{\mathbf{F}}(\mathbf{s}) - \mathbf{s^2}\cdot\mathbf{f}(\mathbf{t}=\mathbf{0^+}) - \mathbf{s}\cdot\mathbf{f'}(\mathbf{t}=\mathbf{0^+}) - \mathbf{f''}(\mathbf{t}=\mathbf{0^+})$
- Dämpfung im Zeitbereich :
  $\mathbf{e^{-\alpha t}}\cdot\mathbf{f(t)} \quad\Rightarrow\quad \underline{\mathbf{F}}(\mathbf{s}+\alpha)$ wobei α beliebig komplex
- Normierungen mit $\mathbf{a>0}$ und reell :
  1. der Zeit: $\mathbf{f(a\cdot t)} \Rightarrow \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a}}\cdot\underline{\mathbf{F}}(\frac{\mathbf{s}}{\mathbf{a}})$ 2. der Frequenz: $\underline{\mathbf{F}}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{s}) \Rightarrow \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{f}(\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{a}})$
- Zeit-Verschiebung [Die Zeitfunktion nach der Verschiebung ist Null für $t < a$] :
  $\mathbf{f(t-a)} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{e^{-as}}\cdot\underline{\mathbf{F}}(\mathbf{s})$ wobei $\mathbf{a\geq 0}$ und reell
- Faltungssatz [Auch gültig mit vertauschten Indizes $\mathbf{1}\Leftrightarrow\mathbf{2}$ bei den Funktionen] :
  $\underline{\mathbf{F}}_\mathbf{1}(\mathbf{s})\cdot\underline{\mathbf{F}}_\mathbf{2}(\mathbf{s}) = \underline{\mathbf{F}}_\mathbf{2}(\mathbf{s})\cdot\underline{\mathbf{F}}_\mathbf{1}(\mathbf{s}) \Rightarrow \mathbf{f_1(t)} * \mathbf{f_2(t)} = \mathbf{f_2(t)} * \mathbf{f_1(t)} = \int\limits_{\mathbf{0}}^{\mathbf{t}} \mathbf{f_1}(\tau)\cdot\mathbf{f_2}(\mathbf{t}-\tau)\mathbf{d}\tau$

Korrespondenz-Tabelle (Teil I)

Nr.	Bildfunktion $\underline{\mathbf{F}}(\mathbf{s})$	Zeitfunktion $\mathbf{f}(\mathbf{t})$	Bemerkungen
1	1	$\delta(t)$	Einheitsimpuls bei t = 0
2	$\frac{1}{s}$	$\sigma(t)$	Einheitssprung bei t = 0 $\boxed{\text{f (t}<0\text{) = 0 ;}\quad \text{f (t}>0\text{) = 1}}$
3	$\frac{1}{s^2}$	$t\cdot\sigma(t)$	
4	$\frac{1}{s^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\sigma(t)$	$n>0$ und ganzzahlig
5	$\frac{1}{s+a}$	$e^{-a\cdot t}\cdot\sigma(t)$	
6	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$t\cdot e^{-a\cdot t}\cdot\sigma(t)$	
7	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\frac{t^{n-1}\cdot e^{-a\cdot t}}{(n-1)!}\cdot\sigma(t)$	$n>0$ und ganzzahlig
8	$\frac{1}{1+as}$	$\frac{e^{-t/a}}{a}\cdot\sigma(t)$	
9	$\frac{1}{(1+as)^2}$	$\frac{t\cdot e^{-t/a}}{a^2}\cdot\sigma(t)$	
10	$\frac{1}{(1+as)^n}$	$\frac{t^{n-1}\cdot e^{-t/a}}{a^n\cdot(n-1)!}\cdot\sigma(t)$	$n>0$ und ganzzahlig

LAPLACE-TRANSFORMATION : Korrespondenz-Tabelle (Teil II)

Nr.	Bildfunktion $\underline{\mathbf{F}}(\mathbf{s})$	Zeitfunktion $\mathbf{f}(\mathbf{t})$	Bem.
11	$\frac{1}{s(s+a)}$	$\frac{1-e^{-a\cdot t}}{a}\cdot\sigma(t)$	
12	$\frac{1}{s(s+a)^2}$	$\frac{1-(1+a\cdot t)\cdot e^{-a\cdot t}}{a^2}\cdot\sigma(t)$	
13	$\frac{1}{s(1+as)}$	$[\,1-e^{-t/a}\,]\cdot\sigma(t)$	
14	$\frac{1}{s(1+as)^2}$	$[\,1-(1+\frac{t}{a})\cdot e^{-t/a}\,]\cdot\sigma(t)$	
15	$\frac{1}{s^2(s+a)}$	$\frac{a\cdot t-1+e^{-a\cdot t}}{a^2}\cdot\sigma(t)$	
16	$\frac{1}{s^2(1+as)}$	$[\,t-a\cdot(1-e^{-t/a})\,]\cdot\sigma(t)$	
17	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{e^{-a\cdot t}-e^{-b\cdot t}}{b-a}\cdot\sigma(t)$	$a\neq b$
18	$\frac{1}{(1+as)(1+bs)}$	$\frac{e^{-t/a}-e^{-t/b}}{a-b}\cdot\sigma(t)$	$a\neq b$
19	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{a\cdot b}\cdot[1+\frac{b\cdot e^{-a\cdot t}-a\cdot e^{-b\cdot t}}{a-b}]\cdot\sigma(t)$	$a\neq b$
20	$\frac{1}{s(1+as)(1+bs)}$	$[\,1+\frac{a\cdot e^{-t/a}-b\cdot e^{-t/b}}{b-a}\,]\cdot\sigma(t)$	$a\neq b$
21	$\frac{\beta}{(s-[\alpha+j\beta])(s-[\alpha-j\beta])}$	$e^{\alpha t}\cdot\sin(\beta t)\cdot\sigma(t)$	*)
21 a	$\frac{-j\,0.5}{(s-[\alpha+j\,\beta])}+\frac{j\,0.5}{(s-[\alpha-j\,\beta])}$	$e^{\alpha t}\cdot\sin(\beta t)\cdot\sigma(t)$	*)
22	$\frac{1}{s(s-[\alpha+j\beta])(s-[\alpha-j\beta])}$	$[\,\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{e^{\alpha t}\cdot\sin(\beta t+\arctan(\beta/-\alpha)-180°)}{\beta\cdot\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\,]\cdot\sigma(t)$	*)
23	$\frac{1}{1+s\cdot\frac{2\cdot D}{\omega_0}+\frac{s^2}{\omega_0^2}}$	$\frac{\omega_0\cdot e^{-D\cdot\omega_0\cdot t}}{\sqrt{1-D^2}}\cdot\sin(\omega_0\cdot\sqrt{1-D^2}\cdot t)\cdot\sigma(t)$	**)
24	$\frac{1}{s(1+s\cdot\frac{2\cdot D}{\omega_0}+\frac{s^2}{\omega_0^2})}$	$[\,1-\frac{e^{-D\cdot\omega_0\cdot t}}{\sqrt{1-D^2}}\cdot\sin(\omega_0\cdot\sqrt{1-D^2}\cdot t+\arccos[D])\,]\cdot\sigma(t)$	**)
25	$K\cdot\frac{[s-\alpha]\cdot\sin(\varphi)+\beta\cdot\cos(\varphi)}{[s-\alpha]^2+\beta^2}$	$K\cdot e^{\alpha t}\cdot\sin(\beta t+\varphi)\cdot\sigma(t)$	*)
26	$\frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$	$[\,\frac{e^{-a\cdot t}}{(b-a)(c-a)}+\frac{e^{-b\cdot t}}{(a-b)(c-b)}+\frac{e^{-c\cdot t}}{(a-c)(b-c)}\,]\cdot\sigma(t)$	$a\neq b\neq c$
27	$\frac{1}{(1+as)(1+bs)(1+cs)}$	$\frac{a(b-c)e^{-t/a}+b(c-a)e^{-t/b}+c(a-b)e^{-t/c}}{(a-b)(a-c)(b-c)}\cdot\sigma(t)$	$a\neq b\neq c$
28*)	$\frac{r_{re}+j\,r_{im}}{(s-[\alpha+j\,\beta])}+\frac{r_{re}-j\,r_{im}}{(s-[\alpha-j\,\beta])}$	$2\sqrt{r_{re}^2+r_{im}^2}\cdot e^{\alpha t}\sin(\beta t+\varphi)\cdot\sigma(t)$	$\varphi=\begin{cases}180°-\arctan\frac{r_{re}}{r_{im}} : r_{im}>0\\ 90°\cdot\frac{r_{re}}{\lvert r_{re}\rvert} : r_{im}=0\\ \arctan\frac{r_{re}}{\lvert r_{im}\rvert} : r_{im}<0\end{cases}$

Bedeutungen und Wertebereiche der in den Gleichungen verwendeten Größen:

*) : $\alpha\leq 0$ $\widehat{=}$ Realteil des konj.- kompl. Polpaares; $\beta>0$ $\widehat{=}$ Imaginärteil des Polpaares

**) : $\omega_0>0$ $\widehat{=}$ Ungedämpfte Eigenkreisfrequenz ; $0\leq D<1$ $\widehat{=}$ Dämpfungsgrad

5. Auflösen nach der gesuchten Größe $\underline{\mathbf{U}}_\mathbf{C}(\mathbf{s})$:

$$\underline{\mathbf{U}}_\mathbf{C}(\mathbf{s}) \cdot (\mathbf{s} + \tfrac{\mathbf{1}}{\tau}) - \mathbf{U_{C0}} = \tfrac{\mathbf{1}}{\tau}\tfrac{\mathbf{U_0}}{\mathbf{s}} \quad ; \quad \underline{\mathbf{U}}_\mathbf{C}(\mathbf{s}) = \frac{\frac{\mathbf{U_0}}{\mathbf{s}\tau} + \mathbf{U_{C0}}}{\mathbf{s} + \mathbf{1}/\tau}$$

6. Zerlegen der Bildfunktion in Partialbrüche: $$\underline{\mathbf{U}}_\mathbf{C}(\mathbf{s}) = \frac{\frac{\mathbf{U_0}}{\tau}}{\mathbf{s}(\mathbf{s} + \mathbf{1}/\tau)} + \frac{\mathbf{U_{C0}}}{\mathbf{s} + \mathbf{1}/\tau}$$

7. Die gliedweise Rücktransformation (mit $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{1}}{\tau}$ nach Nr. 11 bzw. Nr. 5) und Addition der beiden Teilfunktionen ergibt die gesuchte Zeitfunktion:

$$\mathbf{u_C(t)} = [\ \tfrac{\mathbf{U_0}}{\tau} \cdot \tfrac{(\mathbf{1} - \mathbf{e^{-t/\tau}})}{\mathbf{1}/\tau}\ +\ \mathbf{U_{C0}} \cdot \mathbf{e^{-t/\tau}}\ ] \cdot \sigma(\mathbf{t})$$

$$\mathbf{u_C(t)} = [\ \mathbf{10\ V} \cdot (\mathbf{1} - \mathbf{e^{-t/2\,sec}})\ +\ \mathbf{5\ V} \cdot \mathbf{e^{-t/2\,sec}}\ ] \cdot \sigma(\mathbf{t})$$

$$\mathbf{u_C(t)} = [\ \mathbf{10\ V}\ -\ \mathbf{5\ V} \cdot \mathbf{e^{-t/2\,sec}}\ ] \cdot \sigma(\mathbf{t})$$

Das 1. Beispiel auf Seite 61 wird nun auch im Bildbereich bearbeitet und gelöst.

$\mathbf{DGL:}\quad \mathbf{u_C'' + p \cdot u_C' + q \cdot u_C = q \cdot u}$ mit $\mathbf{p = \frac{R}{L} = 20\ \frac{1}{sec}}$; $\mathbf{q = \frac{1}{LC} = 10100\ \frac{1}{sec^2}}$,
den Anfangswerten $\mathbf{u_C(t=0) = u_{C_0} = 0\ V}$; $\mathbf{u_C'(t=0) = 0\ \frac{V}{sec}}$ und $\mathbf{u = U_0 = 1\ V}$

1. $\mathbf{u_C(t) \Longrightarrow \underline{U}_C(s)}$

2. $\mathbf{u_C'' \Longrightarrow s^2 \cdot \underline{U}_C(s) - s \cdot u_C(t=0) - u_C'(t=0) = s^2 \cdot \underline{U}_C(s)}$ sowie
   $\mathbf{u_C' \Longrightarrow s \cdot \underline{U}_C(s) - u_C(t=0) = s \cdot \underline{U}_C(s)}$

3. $\mathbf{u \Longrightarrow \frac{U_0}{s}}$

4. $\mathbf{s^2 \cdot \underline{U}_C(s) + s \cdot p \cdot \underline{U}_C(s) + q \cdot \underline{U}_C(s) = \frac{q \cdot U_0}{s}}$

5. $\mathbf{\underline{U}_C(s) \cdot (s^2 + s \cdot p + q) = \frac{q \cdot U_0}{s}}$; $\mathbf{\underline{U}_C(s) = \frac{q \cdot U_0}{s} \cdot \frac{1}{(s^2 + s \cdot p + q)}}$

   Die Nullstellen der quadratischen Gleichung im Nenner sind die Eigenwerte,
   die bei der DGL bestimmt wurden: $\mathbf{s_{\infty\,1,2} = \lambda_{1,2} = \alpha \pm j\,\beta = (-10 \pm j\,100)\ \frac{1}{sec}}$

$$\mathbf{\underline{U}_C(s) = \frac{10100\ \frac{1}{sec^2} \cdot U_0}{s(s - [\,-10 + j100\,]\ \frac{1}{sec})(s - [\,-10 - j100\,]\ \frac{1}{sec})}}$$

6. Eine Zerlegung in Partialbrüche ist hier nicht erforderlich (Korrespondenz Nr. 22).

7. Rücktransformation nach Nr. 22 ergibt mit dem Faktor $\mathbf{1\ V \cdot 10100\ \frac{1}{sec^2}}$:

$$\mathbf{u_C(t) = 1\ V \cdot 10100\ \frac{1}{sec^2} \cdot [\ \frac{1}{[(-10)^2 + 100^2]\frac{1}{sec^2}} + \frac{e^{-10\frac{t}{sec}} \cdot \sin(100\frac{t}{sec} + \arctan(\frac{100}{-(-10)}) - 180^\circ)}{100\frac{1}{sec}\sqrt{(-10)^2 + 100^2}\frac{1}{sec}}\ ] \cdot \sigma(t)}$$

$$\mathbf{u_C(t) = [\ 1\ V + 1.005\ V \cdot e^{-10\frac{t}{sec}} \cdot \sin(100\frac{t}{sec} - 95.71^\circ)\ ] \cdot \sigma(t)}$$

Die Bewegung der beiden Polstellen der Übertragungs-Funktion $\mathbf{\underline{G}(s) = \frac{\underline{U}_C(s)}{\underline{U}(s)}}$ [d. h. der Eigenwerte] in der s-Ebene bei einer Variation des Widerstandswertes im Bereich $\mathbf{0 \le R \le 2\sqrt{L/C}}$ kann aus der Charakteristischen Gleichung $\mathbf{\underline{C}(s)}$ berechnet werden :

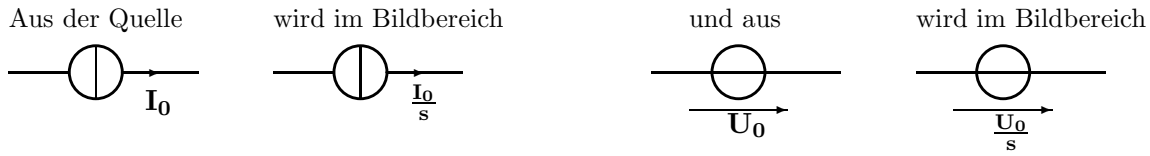
$$\mathbf{\underline{C}(s) = s^2 + s\,p + q = s^2 + s\frac{R}{L} + \frac{1}{LC} = 0 \implies s_{\infty\,1,2} = \alpha \pm j\,\beta = -\frac{R}{2L} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - (\frac{R}{2L})^2}}$$

$\mathbf{R}$	$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\beta = \omega_d}$	$\boldsymbol{\alpha^2 + \beta^2}$	Bemerkungen
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{\sqrt{1/LC} = \omega_0}$	$\boldsymbol{\omega_0^2}$	ungedämpfte Schwingung
$\mathbf{0 < R < 2\sqrt{L/C}}$	$\mathbf{-R/2L}$	$\mathbf{\sqrt{1/LC - (R/2L)^2}}$	$\boldsymbol{\omega_0^2}$	gedämpfte Schwingung
$\mathbf{2\sqrt{L/C}}$	$\mathbf{-R/2L}$	$\mathbf{0}$	$\boldsymbol{\omega_0^2}$	aperiodischer Grenzfall

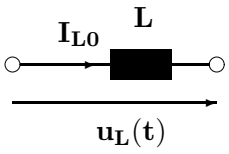
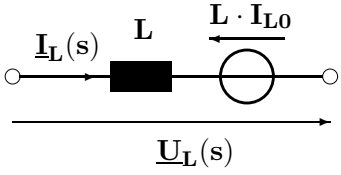
5.2.3 Direkte Lösung im Bildbereich ohne Aufstellen der DGL

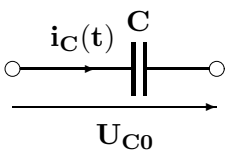
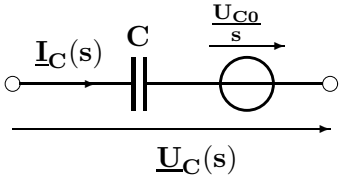
Das Aufstellen der DGL ist nicht erforderlich, wenn alle Elemente der Schaltung mit ihrer Beschreibung in den Bildbereich übertragen werden. Die Schaltungsanalyse erfolgt dann wie bei der Wechselstromrechnung aber mit dem verallgemeinerten Argument $s = \sigma + j\,\omega$ statt $j\,\omega$.

- Jede Gleichstrom- und jede Gleichspannungsquelle, die zur Zeit t=0 eingeschaltet wird, ist im Bildbereich wie folgt zu ersetzen (Andere Signalformen werden später behandelt) :



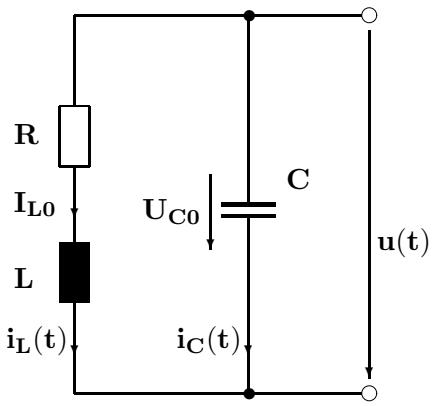
- Alle Widerstände $\mathbf{R}$ werden unverändert in den Bildbereich übernommen.
- Für jede Induktivität $\mathbf{L}$ mit $\underline{\mathbf{Z}}_\mathbf{L}(\mathbf{j}\,\omega) = \frac{1}{\underline{\mathbf{Y}}_\mathbf{L}(\mathbf{j}\,\omega)} = \mathbf{j}\,\omega\mathbf{L}$ setzt man $\underline{\mathbf{Z}}_\mathbf{L}(\mathbf{s}) = \frac{1}{\underline{\mathbf{Y}}_\mathbf{L}(\mathbf{s})} = \mathbf{sL}$
- Für jede Kapazität $\mathbf{C}$ mit $\underline{\mathbf{Z}}_\mathbf{C}(\mathbf{j}\,\omega) = \frac{1}{\underline{\mathbf{Y}}_\mathbf{C}(\mathbf{j}\,\omega)} = \frac{1}{\mathbf{j}\,\omega\mathbf{C}}$ setzt man $\underline{\mathbf{Z}}_\mathbf{C}(\mathbf{s}) = \frac{1}{\underline{\mathbf{Y}}_\mathbf{C}(\mathbf{s})} = \frac{1}{\mathbf{sC}}$
- Sind für $\mathbf{t} = \mathbf{0}^+$ Anfangswerte ($\mathbf{I_{L0}}$, $\mathbf{U_{C0}}$) zu berücksichtigen, findet man mit Hilfe des Differentiationssatzes der Laplace-Transformation $\mathcal{L}\{\,\frac{\mathbf{df(t)}}{\mathbf{dt}}\,\} \;\Rightarrow\; \mathbf{s}\cdot\mathbf{F(s)} - \mathbf{f(t=0^+)}$ geeignete Ersatzschaltungen mit Spannungsquellen für stromdurchflossene Induktivitäten und vorgeladene Kapazitäten. Es lassen sich auch Ersatzschaltungen mit Stromquellen angegeben. Die dort auftretenden Stromverzweigungen erschweren jedoch die Analyse.

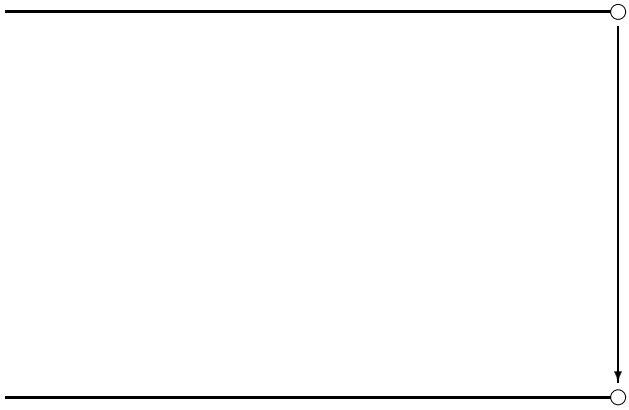
Teilschaltung im Zeitbereich	zugehörige DGL	Gleichung im Bildbereich	Ersatzschaltung im Bildbereich mit Spgs.-Quelle
	$\mathbf{u_L(t)} = \mathbf{L}\cdot\frac{\mathbf{di_L(t)}}{\mathbf{dt}}$	$\underline{\mathbf{U}}_\mathbf{L}(\mathbf{s}) = \mathbf{L}\cdot[\,\mathbf{s}\,\underline{\mathbf{I}}_\mathbf{L}(\mathbf{s}) - \mathbf{I_{L0}}\,]$ und daraus $\underline{\mathbf{I}}_\mathbf{L}(\mathbf{s}) = \frac{\underline{\mathbf{U}}_\mathbf{L}(\mathbf{s})+\mathbf{L}\cdot\mathbf{I_{L0}}}{\mathbf{sL}}$ $\underline{\mathbf{I}}_\mathbf{L}(\mathbf{s}) = \frac{\underline{\mathbf{U}}_\mathbf{L}(\mathbf{s})}{\mathbf{sL}} + \frac{\mathbf{I_{L0}}}{\mathbf{s}}$	

Teilschaltung im Zeitbereich	zugehörige DGL	Gleichung im Bildbereich	Ersatzschaltung im Bildbereich mit Spgs.-Quelle
	$\mathbf{i_C(t)} = \mathbf{C}\cdot\frac{\mathbf{du_C(t)}}{\mathbf{dt}}$	$\underline{\mathbf{I}}_\mathbf{C}(\mathbf{s}) = \mathbf{C}\cdot[\,\mathbf{s}\,\underline{\mathbf{U}}_\mathbf{C}(\mathbf{s}) - \mathbf{U_{C0}}\,]$ und daraus $\underline{\mathbf{U}}_\mathbf{C}(\mathbf{s}) = \frac{\underline{\mathbf{I}}_\mathbf{C}(\mathbf{s})+\mathbf{C}\cdot\mathbf{U_{C0}}}{\mathbf{sC}}$ $\underline{\mathbf{U}}_\mathbf{C}(\mathbf{s}) = \frac{\underline{\mathbf{I}}_\mathbf{C}(\mathbf{s})}{\mathbf{sC}} + \frac{\mathbf{U_{C0}}}{\mathbf{s}}$	

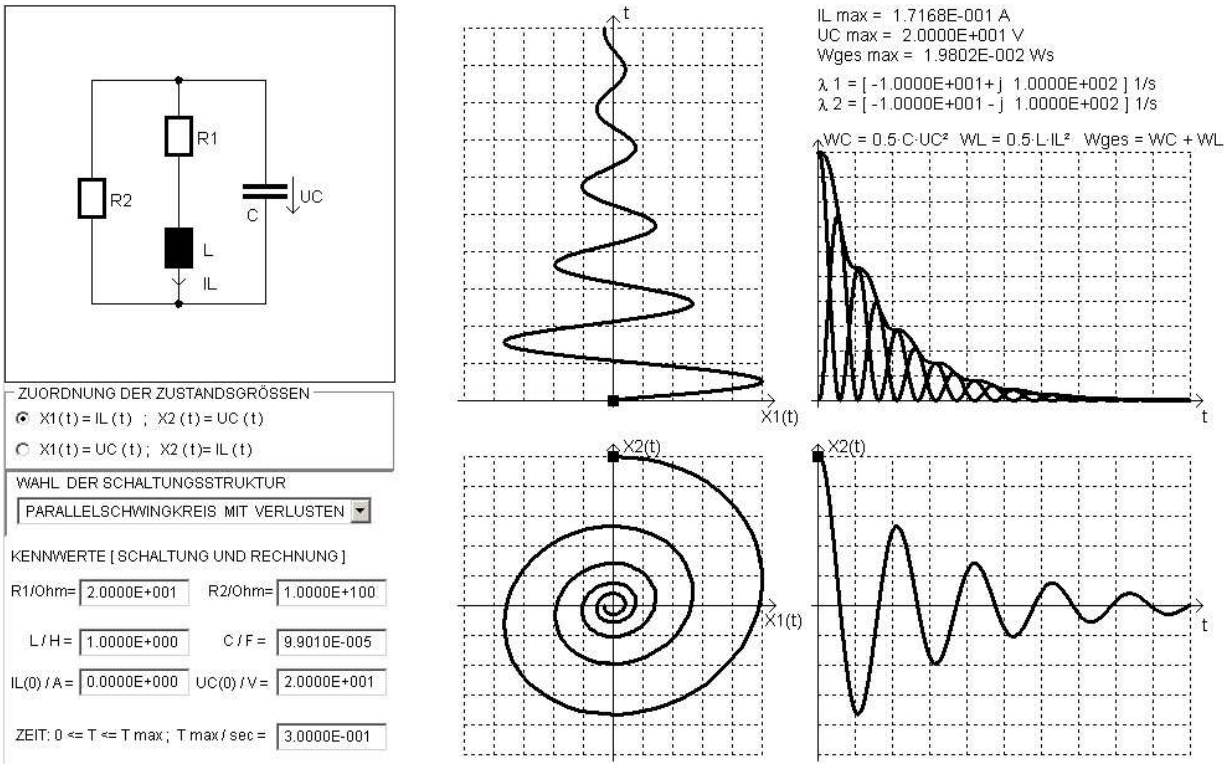
Beispiel: Berechnen Sie allgemein mit Hilfe von Ersatzschaltungen die Bildfunktion der Spannung $\mathbf{u(t)}$ der dargestellten Schaltung unter Berücksichtigung der Anfangswerte $\mathbf{U_{C0}}$, $\mathbf{I_{L0}}$.

Aus der Schaltung mit Anfangswerten im Zeitbereich erhält man als Schaltung im Bildbereich

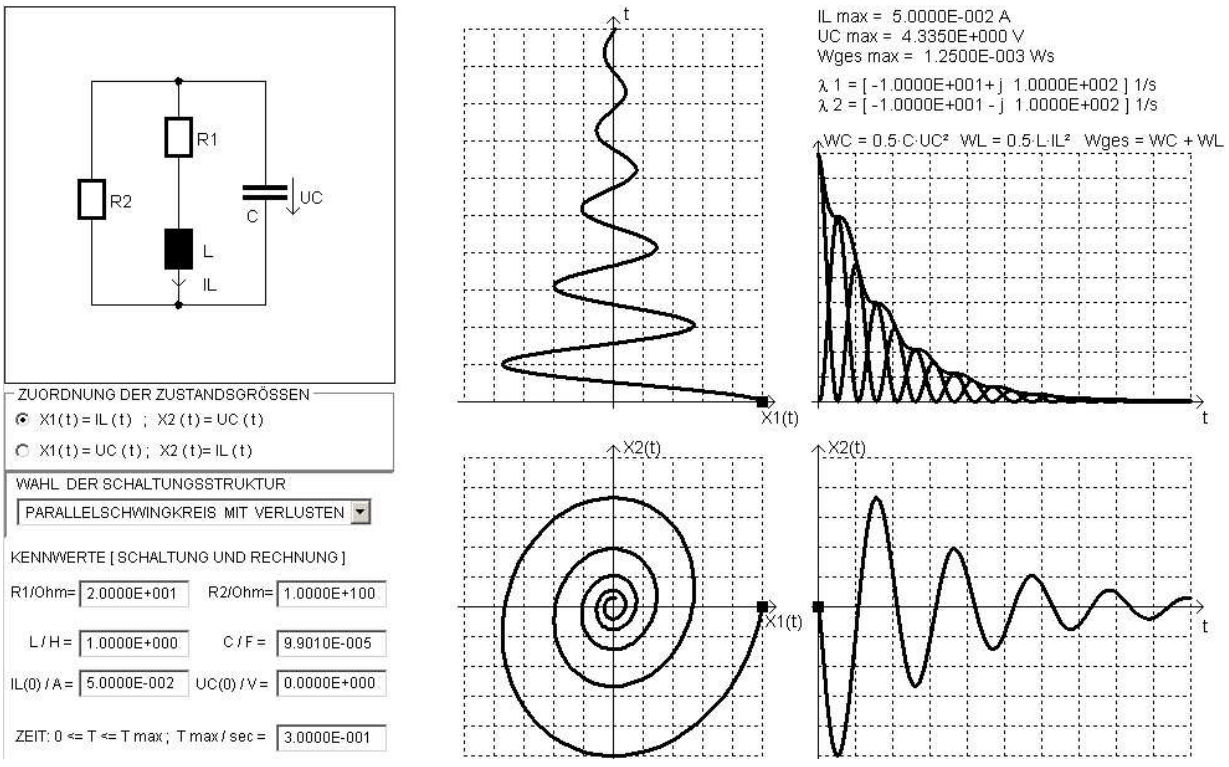




Lösung zum Beispiel auf Seite 66 unten für die Anfangswerte $\mathbf{u_{C0} = 20\,V}$; $\mathbf{i_{L0} = 0\,mA}$
berechnet mit dem Programm **ZUSTAND** .



Lösung zum Beispiel auf Seite 66 unten für die Anfangswerte $\mathbf{u_{C0} = 0\,V}$; $\mathbf{i_{L0} = 50\,mA}$
berechnet mit dem Programm **ZUSTAND** .



5.2.4 DGL und Übertragungs-Funktion bei Netzwerken ohne Anfangswerte

Ist ein elektrisches Netzwerk für t=0 energielos (d.h. alle Anfangswerte sind gleich Null), kann der Übergang von der DGL zur Übertragungs-Funktion (die zur Beschreibung linearer Anordnungen unverzichtbar ist) oder umgekehrt mit folgenden Ersetzungen einfach durchgeführt werden.

$$\mathbf{y' \Longleftrightarrow s \cdot \underline{Y}(s);} \quad \mathbf{y'' \Longleftrightarrow s^2 \cdot \underline{Y}(s);} \quad \mathbf{y''' \Longleftrightarrow s^3 \cdot \underline{Y}(s);} \qquad \ldots \qquad \mathbf{y^{(n)} \Longleftrightarrow s^n \cdot \underline{Y}(s)}$$

Aus der DGL für die Spannung $\mathbf{u_C}$ des passiven Tiefpassfilters vom Grad n=2 auf Seite 60

$$\mathbf{u_C'' + \frac{R}{L} \cdot u_C' + \frac{1}{LC} \cdot u_C = \frac{1}{LC} \cdot u}$$

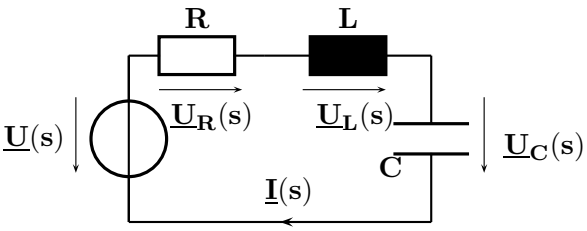
wird im Bildbereich $\mathbf{s^2 \cdot \underline{U}_C(s) + s \cdot \frac{R}{L} \cdot \underline{U}_C(s) + \frac{1}{LC} \cdot \underline{U}_C(s) = \frac{1}{LC} \cdot \underline{U}(s).}$

$\mathbf{\underline{U}_C(s)}$ kann auf der linken Seite als gemeinsamer Faktor ausgeklammert werden.
Bildet man dann das Verhältnis Ausgangssignal zu Eingangssignal, im Beispiel also $\mathbf{\underline{G}(s) = \frac{\underline{U}_C(s)}{\underline{U}(s)}}$, erhält man die so genannte ÜBERTRAGUNGS-FUNKTION $\mathbf{\underline{G}(s)}$.

Diese gebrochen rationale Funktion besteht einem Zählerpolynom und einem Nennerpolynom, das als Charakteristische Gleichung $\mathbf{\underline{C}(s)}$ bezeichnet wird. Deren Nullstellen sind die Eigenwerte der DGL und bilden die Polstellen der Übertragungs-Funktion.

$$\mathbf{\underline{G}(s) = \frac{Ausgangssignal}{Eingangssignal} = \frac{\underline{U}_C(s)}{\underline{U}(s)} = \frac{1/(LC)}{s^2 + s \cdot R/L + 1/(LC)} = \frac{1}{1 + s \cdot RC + s^2 \cdot LC} = \frac{1}{\underline{C}(s)}}$$

Zur gleichen Funktion kommt man auch durch direkte Analyse. Wertet man den unbelasteten Spannungsteiler aus und verwendet für die Wechselstromwiderstände $\mathbf{\underline{Z}_L = sL}$ und $\mathbf{\underline{Z}_C = \frac{1}{sC}}$, erhält man ohne das Aufstellen der DGL



$$\mathbf{\underline{G}(s) = \frac{\underline{U}_C(s)}{\underline{U}(s)} = \frac{\underline{Z}_C(s)}{R + \underline{Z}_L(s) + \underline{Z}_C(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + sL + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{1 + sRC + s^2LC}.}$$

Die höchste im Zähler- oder im Nennerpolynom von $\mathbf{\underline{G}(s)}$ enthaltene Potenz von $\mathbf{s}$ bestimmt die Ordnung oder synonym den Grad des Netzwerks und entspricht der Ordnung der zugehörigen DGL.

Im betrachteten Beispiel besitzt die Übertragungs-Funktion (wegen der beiden verschiedenartigen, unabhängigen Energiespeicher) den Grad n=2.

Die Signalgrößen an Eingang und Ausgang müssen nicht immer gleichartig sein.

Beispiele: Ermitteln Sie für den Reihenschwingkreis folgende Übertragungs-Funktionen.
Geben Sie ihre Frequenzabhängigkeiten (z.B. TP für Tiefpass) an.

Nebenrechnung: $\mathbf{\frac{R}{R + sL + \frac{1}{sC}} = \frac{sRC}{1 + sRC + s^2LC}}$ Einheit:

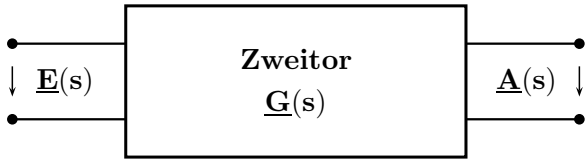
$\mathbf{\underline{G}_1(s) = \frac{\underline{U}_R(s)}{\underline{U}(s)} = \frac{}{1 + sRC + s^2LC}}$ Frequenzabhängigkeit:

$\mathbf{\underline{G}_2(s) = \frac{\underline{U}_L(s)}{\underline{U}(s)} = \frac{}{1 + sRC + s^2LC}}$ Frequenzabhängigkeit:

$\mathbf{\underline{G}_3(s) = \frac{\underline{U}_C(s)}{\underline{U}(s)} = \frac{}{1 + sRC + s^2LC}}$ Frequenzabhängigkeit:

$\mathbf{\underline{G}_4(s) = \frac{\underline{U}_L(s) + \underline{U}_C(s)}{\underline{U}(s)} = \frac{}{1 + sRC + s^2LC}}$ Frequenzabhängigkeit:

Für technische Anwendungen sind Zweitore von besonderem Interesse, da sie einer Berechnung mit nur zwei Gleichungen relativ leicht zugänglich sind. Man fasst bei diesen Netzwerken je zwei Anschlüsse zu einem Tor zusammen und bildet so ein Eingangs- und ein Ausgangstor.



$$\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{s}) = \frac{\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{s})}{\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{s})}$$

Eingangstor Ausgangstor

Die Übertragungs-Funktion $\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{s})$ beschreibt im Bildbereich das Verhältnis Ausgangssignal zu Eingangssignal und kann in allen Fällen mit zwei gleichartigen Signalen (Spannungen oder Ströme) auch als Verstärkungsfunktion verstanden werden.

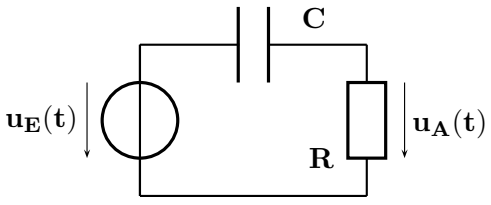
Durch Umschreiben der Übertragungs-Funktion erhält man $\boxed{\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{s}) = \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{s}) \cdot \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{s})}$.

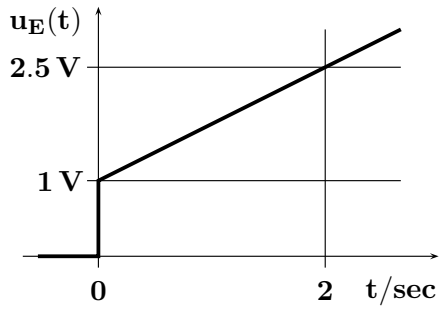
Entnimmt man die Bildfunktion des Eingangssignals $\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{s})$ der Laplace-Tabelle, lässt sich auf einfache Art die Bildfunktion des Ausgangssignals $\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{s})$ gemäß $\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{s}) \cdot \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{s})$ ermitteln.

Die folgende Tabelle enthält einige der wichtigsten Zeitfunktionen $\mathbf{e}(\mathbf{t})$ und deren Bildfunktionen $\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{s})$. Aus diesen und den Transformationspaaren auf den Seiten 63 und 64 können auch kompliziertere Funktionen zusammengesetzt werden.

e(t)	E(s)	Bezeichnung	siehe Seite
$\delta(t)$	1	Einheitsimpuls bei t=0	63; Nr. 1
$\sigma(t)$	$\frac{1}{s}$	Einheitssprung bei t=0	63; Nr. 2
$k \cdot t \cdot \sigma(t)$	$\frac{k}{s^2}$	Rampenfunktion, Beginn bei t=0	63; Nr. 3
$K \cdot \sin(\omega t + \varphi) \cdot \sigma(t)$	$K \cdot \frac{s \cdot \sin(\varphi) + \omega \cdot \cos(\varphi)}{s^2 + \omega^2}$	Allgemeine Sinusfunktion, Beginn bei t=0	64; Nr. 25

Beispiel: Gegeben ist ein passives Zweitor mit der Zeitkonstante $\tau = \mathbf{RC} = \mathbf{2\ sec}$
und der Zeitverlauf der Eingangsspannung $\mathbf{u_E(t)}$.





a.) Ermitteln Sie die Übertragungs-Funktion $\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{s})$.

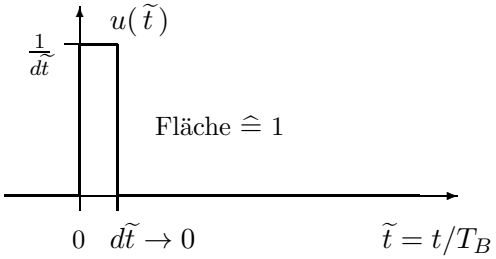
b.) Geben Sie die Bildfunktion des Eingangssignals $\underline{\mathbf{U}}_{\mathbf{E}}(\mathbf{s})$ an.

c.) Berechnen Sie die Bildfunktion des Ausgangssignals $\underline{\mathbf{U}}_{\mathbf{A}}(\mathbf{s})$
und zerlegen Sie diese in Partialbrüche.

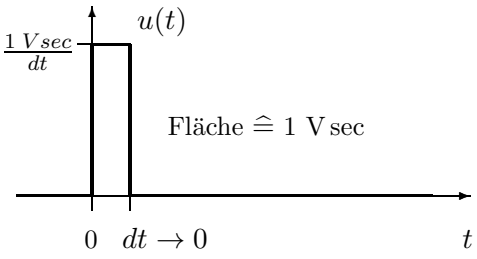
d.) Ermitteln Sie die Zeitfunktion $\mathbf{u_A(t)}$ und skizzieren Sie deren Verlauf.

5.2.5 Einheits-Impulsantwort (EIA) oder Gewichtsfunktion g(t)

Erregt man ein lineares Netzwerk am Eingang mit einem Impuls $\delta(\mathbf{t})$, der zur Zeit t=0 wirkt, eine Dauer $\mathbf{d\tilde{t} \to 0}$ bzw. $\mathbf{dt \to 0}$ besitzt und die Fläche eins bzw. 1 Vsec umschließt, antwortet es am Ausgang mit seiner Einheits-Impulsantwort EIA, die auch 'Gewichtsfunktion' genannt und mit g(t) bezeichnet wird.



Normierter Einheitsimpuls $\delta(\tilde{t})$



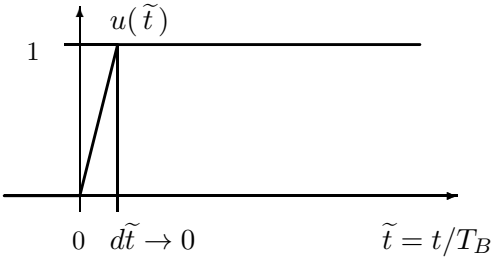
Einheits-Spannungs-Impuls $1\ \text{Vsec}\cdot\delta(t)$

Mit der Bildfunktion des (Dirac-) Impulses am Eingang $\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{s}) = \mathbf{1}$ bzw. $\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{s}) = \mathbf{1\,Vsec}$ ist das Ausgangssignal -die EIA im Bildbereich- gemäß $\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{s}) = \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{s}) \cdot \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{s})$ gleich der bzw. proportional zur Übertragungs-Funktion.

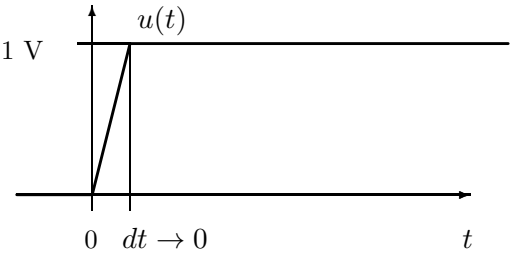
Die EIA g(t) ist bei der später folgenden Betrachtung der Faltung von entscheidender Bedeutung.

5.2.6 Einheits-Sprungantwort (ESA) oder Übergangsfunktion h(t)

Erregt man ein lineares Netzwerk am Eingang mit einem sprungförmigen Signal $\sigma(\mathbf{t})$ bzw. $\mathbf{1\,V \cdot \sigma(t)}$, das zur Zeit t=0 einsetzt und den Endwert 1 bzw. 1 V nach $\mathbf{d\tilde{t} \to 0}$ bzw. $\mathbf{dt \to 0}$ erreicht, antwortet es am Ausgang mit seiner Einheits-Sprungantwort ESA, die auch 'Übergangsfunktion' genannt und mit h(t) bezeichnet wird.



Normierter Einheitssprung $\sigma(\tilde{t})$



Einheits-Spannungs-Sprung $1\ \text{V}\cdot\sigma(t)$

Als Folge der Bildfunktion des Einheitssprunges am Eingang $\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{s}}$ bzw. $\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{1\,V}}{\mathbf{s}}$ enthält das Ausgangssignal -die ESA im Bildbereich- eine Polstelle im Ursprung der s-Ebene $\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{s}) = \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{s}) \cdot \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{s})$. Die Bildfunktion der ESA ist ebenfalls eine gebrochen rationale Funktion.

Überlegen Sie anhand der oben stehenden Bilder mit welchen mathematischen Operationen aus einem Einheitsimpuls ein Einheitssprung und ein Einheitsimpuls aus einem Einheitssprung erzeugt werden kann. Beachten Sie bei diesen Überlegungen auch die Bildfunktionen der nötigen Operationen!

Beispiel:

a.) Berechnen Sie die Übertragungs-Funktion $\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{s})$ eines passiven RLC-Tiefpassfilters vom Grad n=2 mit folgenden Elementewerten $\mathbf{R = 100\,\Omega}$, $\mathbf{L = 83.333\,mH}$, $\mathbf{C = 12\,\mu F}$.

Bringen Sie die Funktion auf die Form $\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{s}) = \frac{\underline{\mathbf{U_A}}(\mathbf{s})}{\underline{\mathbf{U_E}}(\mathbf{s})} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1 + s\,2D/\omega_0 + s^2/\omega_0^2}}$

und ermitteln Sie per Koeffizientenvergleich die für die Rücktransformation benötigten Kennwerte Dämpfungsgrad $\mathbf{D}$ und ungedämpfte Eigenkreisfrequenz $\omega_\mathbf{0}$.

b.) Ermitteln Sie die Bildfunktionen für
b1.) einen Einheits-Spannungs-Impuls und
b2.) einen Einheits-Spannungs-Sprung.

c.) Berechnen Sie damit die zugehörigen Bildfunktionen für die beiden Ausgangssignale und transformieren Sie diese mit der Laplace-Tabelle zurück in den Zeitbereich.

5.2.7 Partialbruch-Zerlegung (PBZ) von Bildfunktionen

Jede echt gebrochen rationale Bildfunktion $\mathbf{\underline{F}(s) = \underline{E}(s) \cdot \underline{G}(s)}$ [Zählergrad < Nennergrad]
kann in DREI GLEICHWERTIGEN VARIANTEN dargestellt werden:

- Summenform: Kenngrößen sind die Polynom-Koeffizienten.
- Produktform: Kenngrößen sind die Konstante Q sowie die Pol- und Nullstellen.
- PBZ: Kenngrößen sind die Partialbruch-Koeffizienten, die auch Residuen genannt werden.

Zur Berechnung der PBZ verwendet man am besten die folgende Form von $\mathbf{\underline{F}(s)}$.
>>> ACHTUNG: Die Konstante im Nenner hat hier den Wert 1. <<<

$$\mathbf{\underline{F}(s) = \frac{b_0 + b_1 \cdot s + b_2 \cdot s^2 + \ldots + b_m \cdot s^m}{(s - s_{\infty 1})(s - s_{\infty 2}) \ldots (s - s_{\infty n})}} = \frac{\text{Zähler-Polynom } \underline{\mathbf{Z}}(\mathbf{s})\text{(Grad m, Summenform)}}{\text{Nenner-Polynom } \underline{\mathbf{N}}(\mathbf{s})\text{(Grad n, Produktform)}}$$

Die PBZ orientiert sich nur an den POLSTELLEN von $\mathbf{\underline{F}(s)}$; die Nullstellen der Funktion sind (nicht direkt ablesbar aber trotzdem vollständig) in den Residuen enthalten. Abhängig von den auftretenden Vielfachheiten der Polstellen muss der zutreffende Ansatz für die Zerlegung gewählt werden.

Reelle Polstellen $s_{\infty\nu} = \alpha_{\infty\nu}$ führen in jedem Fall auf reelle Residuen r_ν.

Konjugiert komplexe Polpaare $s_{\infty 1,2} = \alpha_\infty \pm j\ \beta_\infty$ ergeben immer
zwei Residuen $\underline{r}_1$, $\underline{r}_2$, die zueinander konjugiert komplex sind: $\underline{r}_2 = \underline{r}_1^*$.

Zum PB mit $s_{\infty 1} = \alpha_\infty + j\ \beta_\infty$ gehört das Residuum $\underline{r}_1 = r_{re} + j\ r_{im}$ und
zum PB mit $s_{\infty 2} = \alpha_\infty - j\ \beta_\infty$ gehört das Residuum $\underline{r}_2 = r_{re} - j\ r_{im} = \underline{r}_1^*$.

a) $\underline{\mathbf{F}}(\mathbf{s})$ enthält nur einfache Polstellen

$$\mathbf{\underline{F}(s) = \frac{\underline{r}_1}{s - s_{\infty 1}} + \frac{\underline{r}_2}{s - s_{\infty 2}} + \frac{\underline{r}_3}{s - s_{\infty 3}} + \ldots + \frac{\underline{r}_n}{s - s_{\infty n}} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\underline{r}_\nu}{s - s_{\infty\nu}}} \qquad (\ 1\ )$$

Die Berechnung der im allgemeinen Fall komplexen RESIDUEN oder PARTIALBRUCH-KOEFFIZIENTEN $\underline{r}_\nu$ ist schneller und einfacher möglich als durch Koeffizientenvergleich mit

$$\boxed{\mathbf{\underline{r}_\nu = \frac{\underline{Z}(s) \cdot (s - s_{\infty\nu})}{\underline{N}(s)} \Big| \, s = s_{\infty\nu}}} \qquad \text{oder} \qquad \boxed{\mathbf{\underline{r}_\nu = \frac{\underline{Z}(s)}{d\underline{N}(s)/ds} \Big| \, s = s_{\infty\nu}}}$$

$\underline{N}(s)$ ist nur als Produktform gegeben oder $\underline{N}(s)$ ist auch als Summenform gegeben.

b) $\underline{\mathbf{F}}(\mathbf{s})$ enthält auch mehrfache Polstellen (Beispiel)

$$\mathbf{\underline{F}(s) = \frac{\underline{r}_{1,1}}{s - s_{\infty 1}} + \frac{\underline{r}_{2,1}}{(s - s_{\infty 2})^1} + \frac{\underline{r}_{2,2}}{(s - s_{\infty 2})^2} + \frac{\underline{r}_{2,3}}{(s - s_{\infty 2})^3} = \sum_{i=1}^{w} \sum_{k=1}^{q_i} \frac{\underline{r}_{i,k}}{(s - s_{\infty i})^k}} \qquad (\ 2\ )$$

$\mathbf{w}$ steht für die Anzahl der verschiedenen Polstellen (im Beispiel oben gilt $\mathbf{w} = \ldots$).

$\mathbf{q_i}$ beschreibt die Vielfachheit der Polstelle $\mathbf{i}$ (im Beispiel : $\mathbf{q_1} = \ldots$, $\mathbf{q_2} = \ldots$).

$\mathbf{n = q_1 + q_2 + q_3 + \ldots + q_w}$ gibt den Grad des Nennerpolynoms an (im Beispiel : $\mathbf{n} = \ldots$).

Laufzahlen in der Doppelsumme: $\mathbf{i = 1, 2, 3, \ldots, w}$ und $\mathbf{k = 1, 2, 3, \ldots, q_i}$

Die im allgemeinen Fall komplexen RESIDUEN (PARTIALBRUCH-KOEFFIZIENTEN) $\mathbf{\underline{r}_{i,k}}$ berechnet man gemäß der folgenden Gleichung [QUOTIENTENREGEL beachten!] .

$$\boxed{\mathbf{\underline{r}_{i,k} = \frac{1}{(q_i - k)!} \cdot \frac{d^{q_i - k}}{ds^{q_i - k}} [\, \underline{F}(s) \cdot (s - s_{\infty i})^{q_i} \,] \Big| \, s = s_{\infty i}}}$$

Rücktransformation der Partialbruch-Zerlegung (PBZ) von Bildfunktionen

Durch die Partialbruch-Zerlegung wird aus der Bildfunktion die vollständige Summe ihrer additiven, elementaren Bestandteile gewonnen. Danach ist die gliedweise Rücktransformation der einzelnen Summanden mit den Korrespondenzen der Laplace-Transformation relativ einfach möglich.

WICHTIGE EINSICHT: So wie die Summe aller Partialbrüche die Gesamtbildfunktion ergibt, ergibt die Summe aller gliedweise rücktransformierten Teilzeitfunktionen die Gesamtzeitfunktion.

a) Rücktransformation wenn $\underline{\mathbf{F}}(\mathbf{s})$ nur einfache Polstellen enthält

Die Berechnung der PBZ erfolgt nach Seite 71. Bei der Laplace-Rücktransformation wird die Korrespondenz Nr. 5 auf Seite 63 (wenn nötig mit einem komplexem Wert a) verwendet.

$$\underline{\mathbf{F}}(\mathbf{s}) = \frac{\underline{\mathbf{r}}_1}{\mathbf{s}-\mathbf{s}_{\infty 1}} + \frac{\underline{\mathbf{r}}_2}{\mathbf{s}-\mathbf{s}_{\infty 2}} + \ldots + \frac{\underline{\mathbf{r}}_n}{\mathbf{s}-\mathbf{s}_{\infty n}} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\underline{\mathbf{r}}_\nu}{\mathbf{s}-\mathbf{s}_{\infty\nu}} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{f(t)} = \sum_{\nu=1}^{n} \underline{\mathbf{r}}_\nu \cdot \mathbf{e}^{\mathbf{s}_{\infty\nu}\cdot\mathbf{t}}$$

Wegen der reellen Polynom-Koeffizienten können alle Polstellen bekanntlich nur auf der reellen Achse oder als konjugiert komplexe Paare in der $\underline{s}$-Ebene liegen.

- Jede einfache reelle Polstelle $s_{\infty\nu} = \alpha_{\infty\nu}$ trägt zur Gesamtzeitfunktion $\mathbf{f(t)}$ mit einer reellen Exponentialfunktion (ZEITKONSTANTE $\tau_\nu = \frac{-1}{\alpha_{\infty\nu}}$) bei: $f_\nu(t) = r_\nu \cdot e^{\alpha_{\infty\nu}\cdot t}$

- Die beiden Partialbrüche des einfachen, konjugiert komplexen Polpaares $\mathbf{s}_{\infty\nu} = \alpha_\nu \pm \mathbf{j}\,\beta_\nu$

  $$\underbrace{\frac{\underline{\mathbf{r}}}{\mathbf{s}-[\alpha_\nu + \mathbf{j}\,\beta_\nu]}}_{\text{obere Polstelle}} + \underbrace{\frac{\underline{\mathbf{r}}^*}{\mathbf{s}-[\alpha_\nu - \mathbf{j}\,\beta_\nu]}}_{\text{untere Polstelle}}$$

  besitzen immer konjugiert komplexe Residuen.

  Es reicht deshalb aus, nur das Resiudum zur oberen Polstelle zu berechnen: $\underline{\mathbf{r}} = \mathbf{r_{re}} + \mathbf{j}\,\mathbf{r_{im}}$ (siehe dazu auch die Korrespondenz Nr. 28 auf Seite 64). Die beiden Partialbrüche tragen zur Gesamtzeitfunktion $\mathbf{f(t)}$ durch die beiden, konjugiert komplexen Zeitfunktionen $\underline{\mathbf{f}}_\mathbf{1}\mathbf{(t)}$ [von der oberen Polstelle] und $\underline{\mathbf{f}}_\mathbf{2}\mathbf{(t)} = \underline{\mathbf{f}}_\mathbf{1}^*\mathbf{(t)}$ [von der unteren Polstelle] bei, die man mit elementaren Umformungen zu einem reellen Beitrag $\mathbf{f_{12}(t)}$ zusammenfassen kann:

  $$\mathbf{f_{12}(t)} = \underline{\mathbf{f}}_\mathbf{1}\mathbf{(t)} + \underline{\mathbf{f}}_\mathbf{2}\mathbf{(t)} = (\mathbf{r_{re}} + \mathbf{j}\,\mathbf{r_{im}}) \cdot \mathbf{e}^{(\alpha_{\infty\,\nu} + \mathbf{j}\,\beta_{\infty\,\nu})\cdot\mathbf{t}} + (\mathbf{r_{re}} - \mathbf{j}\,\mathbf{r_{im}}) \cdot \mathbf{e}^{(\alpha_{\infty\,\nu} - \mathbf{j}\,\beta_{\infty\,\nu})\cdot\mathbf{t}}$$

  $$\mathbf{f_{12}(t)} = \mathbf{2} \cdot \mathbf{e}^{\alpha_{\infty\,\nu}\cdot\mathbf{t}} \cdot (\mathbf{r_{re}} \cdot \cos\beta_{\infty\,\nu}\mathbf{t} - \mathbf{r_{im}} \cdot \sin\beta_{\infty\,\nu}\mathbf{t})\,.$$ Äquivalente Umformung ergibt

$$\mathbf{f_{12}(t)} = \mathbf{2}\sqrt{\mathbf{r_{re}^2} + \mathbf{r_{im}^2}} \cdot \mathbf{e}^{\alpha_{\infty\,\nu}\cdot\mathbf{t}} \cdot \sin(\beta_{\infty\,\nu}\mathbf{t} + \varphi) \quad \text{mit dem Winkel} \quad \varphi = \arctan\tfrac{\mathbf{r_{re}}}{-\mathbf{r_{im}}}$$

Der Winkel φ muss immer dann um $\pm 180°$ korrigiert werden, wenn $\mathbf{r_{im}} > \mathbf{0}$.
Nur so ist sichergestellt, dass der Winkel im richtigen Quadranten liegt.

Die exponentiell mit der Zeit abklingende allgemeine Sinusfunktion $\mathbf{f_{12}(t)}$ besitzt die HÜLLKURVEN- oder ABKLING-ZEITKONSTANTE $\tau_{ab\,\nu} = \frac{-1}{\alpha_{\infty\nu}}$.

b) Rücktransformation wenn $\underline{\mathbf{F}}(\mathbf{s})$ auch mehrfache Polstellen enthält

Die Berechnung der PBZ erfolgt nach Seite 71. Bei der Laplace-Rücktransformation wird die Korrespondenz Nr. 7 auf Seite 63 (wenn nötig mit einem komplexem Wert a) verwendet.

$$\underline{\mathbf{F}}(\mathbf{s}) = \frac{\underline{\mathbf{r}}_{1,1}}{\mathbf{s}-\mathbf{s}_{\infty 1}} + \frac{\underline{\mathbf{r}}_{2,1}}{(\mathbf{s}-\mathbf{s}_{\infty 2})^{\mathbf{1}}} + \frac{\underline{\mathbf{r}}_{2,2}}{(\mathbf{s}-\mathbf{s}_{\infty 2})^{\mathbf{2}}} + \frac{\underline{\mathbf{r}}_{2,3}}{(\mathbf{s}-\mathbf{s}_{\infty 2})^{\mathbf{3}}} = \sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{w}} \sum_{\mathbf{k}=1}^{\mathbf{q_i}} \frac{\underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{i},\mathbf{k}}}{(\mathbf{s}-\mathbf{s}_{\infty\mathbf{i}})^{\mathbf{k}}}$$

$$\underline{\mathbf{F}}(\mathbf{s}) = \sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{w}} \sum_{\mathbf{k}=1}^{\mathbf{q_i}} \frac{\underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{i},\mathbf{k}}}{(\mathbf{s}-\mathbf{s}_{\infty\mathbf{i}})^{\mathbf{k}}} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{f(t)} = \sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{w}} \sum_{\mathbf{k}=1}^{\mathbf{q_i}} \frac{\mathbf{t}^{(\mathbf{k}-\mathbf{1})}}{(\mathbf{k}-\mathbf{1})!} \cdot \underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{i},\mathbf{k}} \cdot \mathbf{e}^{\mathbf{s}_{\infty\mathbf{i}}\cdot\mathbf{t}}$$

Alle oben unter a) getroffenen Aussagen zu den Teilzeitfunktionen reeller Pole und zur Zusammenfassung der Teilzeitfunktionen bei konjugiert komplexen Polpaaren gelten hier sinngemäß.
Bei allen Teilzeitfunktionen ist der Faktor $\frac{\mathbf{t}^{(\mathbf{k}-\mathbf{1})}}{(\mathbf{k}-\mathbf{1})!}$ zu beachten.

Beispiele zu Bildfunktionen: PBZ, Rücktransformation (Programm **LAPLACE**)

Gegeben: $\mathbf{\underline{F}_1(s) = \frac{-40\,s-8}{s^3+7\,s^2+27\,s+85} = \frac{-40(s-[-0.2])}{(s-[-5])(s-[-1+j4])(s-[-1-j4])} = \frac{\underline{Z}(s)}{\underline{N}(s)}}$

a.) Ist die gegebene Bildfunktion $\mathbf{\underline{F}_1(s)}$ teilerfremd?
b.) Enthält die Funktion nur einfache oder auch mehrfache Pole?
c.) Berechnen Sie die zugehörige PBZ.
d.) Ermitteln Sie durch gliedweise Rücktransformation der PBZ die Zeitfunktion $\mathbf{f_1(t)}$.

Lösung: a.) Ja, da keine gemeinsamen Faktoren im Zähler- und Nennerpolynom enthalten sind.
b.) Nein, da alle (auch die die konjugiert komplexen) Pole an verschiedenen Stellen liegen.

c.) $\mathbf{\underline{F}_1(s) = \frac{r_1}{s-[-5]} + \frac{\underline{r}_2}{s-[-1+j\,4]} + \frac{\underline{r}_2^*}{s-[-1-j\,4]} = \frac{r_1}{s+5} + \frac{\underline{r}_2}{s+1-j\,4} + \frac{\underline{r}_2^*}{s+1+j\,4}}$ (Pol oben, Pol unten)

Berechnung von $\mathbf{r_1}$ z.B. mit $\mathbf{r_1 = \frac{\underline{Z}(s)\cdot(s+5)}{\underline{N}(s)}|_{s=-5} = \frac{-40\,s-8}{s^2+2\,s+17}|_{s=-5} = \frac{-40\cdot(-5)-8}{25+2\cdot(-5)+17} = \frac{192}{32} = 6}$
Das Residuum jeder reellen Polstelle besitzt immer einen reellen Wert!

$\mathbf{\underline{r}_2}$ zum oberen Pol berechnen z.B. mit $\mathbf{\underline{r}_2 = \frac{\underline{Z}(s)}{d\underline{N}(s)/ds}|_{s=-1+j\,4}}$; $\mathbf{\frac{dN(s)}{ds} = 3\,s^2+14\,s+27}$

$\mathbf{\underline{r}_2 = \frac{-40\,s-8}{3\,s^2+14\,s+27}|_{s=-1+j\,4} = \frac{-40(-1+j\,4)-8}{3(-1+j\,4)^2+14(-1+j\,4)+27} = \frac{32-j\,160}{-32+j\,32} = -3+j\,2 = r_{2\,re}+j\,r_{2\,im}}$
Das Residuum jeder komplexen Polstelle besitzt im Allgemeinen einen komplexen Wert!

d.) Rücktransformation nach Seite 72 liefert aus $\mathbf{\underline{F}_1(s) = \frac{6}{s+5} + \frac{-3+j\,2}{s+1-j\,4} + \frac{-3-j\,2}{s+1+j\,4}}$ die
Zeitfunktion $\mathbf{f_1(t) = 6\cdot e^{-5t} + 2\sqrt{(-3)^2+(2)^2}\cdot e^{-1t}\cdot\sin(4t+\varphi)}$; $\mathbf{\widetilde{\varphi} = \arctan\frac{-3}{-[+2]} = 56.31^\circ}$.
Mit der Amplitude $\mathbf{2\sqrt{13} = 7.2111}$ und dem um $\mathbf{-180^\circ}$ korrigierten Winkel $\mathbf{\widetilde{\varphi}}$
erhält man die gesuchte Zeitfunktion $\mathbf{f_1(t) = 6\cdot e^{-5t} + 7.2111\cdot e^{-1t}\cdot\sin(4t-123.69^\circ)}$.

Gegeben: $\mathbf{\underline{F}_2(s) = \frac{5\,s^2+24\,s+32}{s^3+8\,s^2+20\,s+16} = \frac{5\,s^2+24\,s+32}{(s+2)^2(s+4)} = \frac{\underline{Z}(s)}{\underline{N}(s)}}$

a.) Ist die gegebene Bildfunktion $\mathbf{\underline{F}_2(s)}$ teilerfremd?
b.) Enthält die Funktion nur einfache oder auch mehrfache Pole?
c.) Berechnen Sie die zugehörige PBZ.
d.) Ermitteln Sie durch gliedweise Rücktransformation die Zeitfunktion $\mathbf{f_2(t)}$.

Lösung: a.) Lage der Nullstellen aus der Gleichung $\mathbf{5\,s^2+24\,s+32=0}$:
$\mathbf{s_{0\,1,2} = \frac{-24\pm\sqrt{24^2-4\cdot5\cdot32}}{2\cdot5} = \frac{-24\pm\sqrt{576-640}}{10} = -2.4\pm j\,0.8}$; $\mathbf{s_{0\,3}\to\infty}$ (Gradunterschied)
Lage der Polstellen aus der Gleichung $\mathbf{(s+2)^2(s+4)=0}$:
$\mathbf{s_{\infty\,1,2} = -2}$ (diese Polstelle ist doppelt!) $\mathbf{s_{\infty\,3} = -4}$
Die gegebene Funktion ist teilerfremd: Keine gemeinsamen Faktoren in Zähler- und Nennerpolynom.

b.) Sie enthält offensichtlich auch mehrfache Pole, was beim Ansatz für die PBZ zu beachten ist.

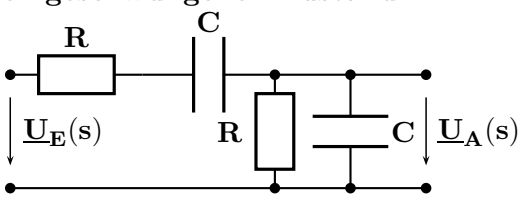
c.) $\mathbf{\underline{F}_2(s) = \frac{r_{1,1}}{[s-(-2)]^1} + \frac{r_{1,2}}{[s-(-2)]^2} + \frac{r_{2,1}}{s-(-4)} = \frac{r_{1,1}}{(s+2)^1} + \frac{r_{1,2}}{(s+2)^2} + \frac{r_{2,1}}{s+4}}$ Siehe Seite 71.

Die Bearbeitung der 1. Polstelle erfolgt mit $\mathbf{i=1}$; $\mathbf{q_1=2}$ da diese Polstelle eine doppelte ist.
Mit k=1 : $\mathbf{r_{1,1} = \frac{1}{(2-1)!}\cdot\frac{d^1}{ds^1}\left[\frac{5\,s^2+24\,s+32}{(s+2)^2(s+4)}\cdot(s+2)^2\right]_{s=-2} = \frac{(10\,s+24)(s+4)-(5\,s^2+24\,s+32)(1)}{(s+4)^2}|_{s=-2} = 1}$
Mit k=2 : $\mathbf{r_{1,2} = \frac{1}{(2-2)!}\cdot\frac{d^0}{ds^0}\left[\frac{5\,s^2+24\,s+32}{(s+2)^2(s+4)}\cdot(s+2)^2\right]_{s=-2} = \frac{20-48+32}{2} = 2}$

Die Bearbeitung der 2. Polstelle erfolgt mit $\mathbf{i=2}$; $\mathbf{q_2=1}$ da diese Polstelle einfach ist.
Für k=1 folgt: $\mathbf{r_{2,1} = \frac{1}{(1-1)!}\cdot\frac{d^0}{ds^0}\left[\frac{5\,s^2+24\,s+32}{(s+2)^2(s+4)}\cdot(s+4)\right]_{s=-4} = \frac{80-96+32}{4} = 4}$
Da die Funktion nur reelle Polstellen besitzt, erhalten alle Residuen reelle Werte.

d.) Rücktransformation nach Seite 72 liefert aus $\mathbf{\underline{F}_2(s) = \frac{1}{(s+2)^1} + \frac{2}{(s+2)^2} + \frac{4}{s+4}}$
die gesuchte Zeitfunktion $\mathbf{f_2(t) = 1\cdot e^{-2t} + 2\cdot t\cdot e^{-2t} + 4\cdot e^{-4t} = (1+2\cdot t)\cdot e^{-2t} + 4\cdot e^{-4t}}$.

Beispiel zur Laplace-Transformation und zum eingeschwungenen Zustand



a.) Ermitteln Sie $\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{s}) = \frac{\underline{\mathbf{U}}_\mathbf{A}(\mathbf{s})}{\underline{\mathbf{U}}_\mathbf{E}(\mathbf{s})}$ erst allgemein dann mit den Werten $\mathbf{R = 10\ k\Omega}$; $\mathbf{C = 10\ nF}$

b.) Geben Sie die Produktform von $\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{s})$ an.

c.) Zeichnen Sie den PN-Plan zu b.) (Q angeben!).

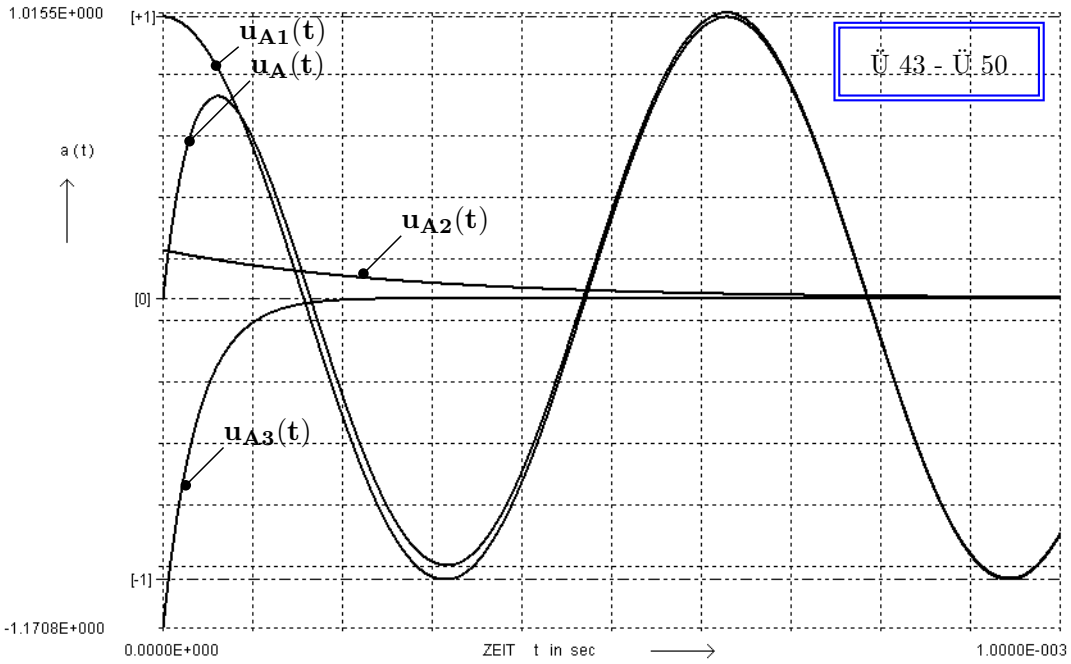
d.) Ermitteln Sie die Bildfunktion $\underline{\mathbf{U}}_\mathbf{E}(\mathbf{s})$ zu $\mathbf{u_E(t) = 3\ V \cdot \cos(\omega t) \cdot \sigma(t)}$; $\omega = \mathbf{10^4\ \frac{1}{sec}}$.

e.) Berechnen Sie $\underline{\mathbf{U}}_\mathbf{A}(\mathbf{s})$, die zugehörige PBZ und führen Sie die Rücktransformation durch.

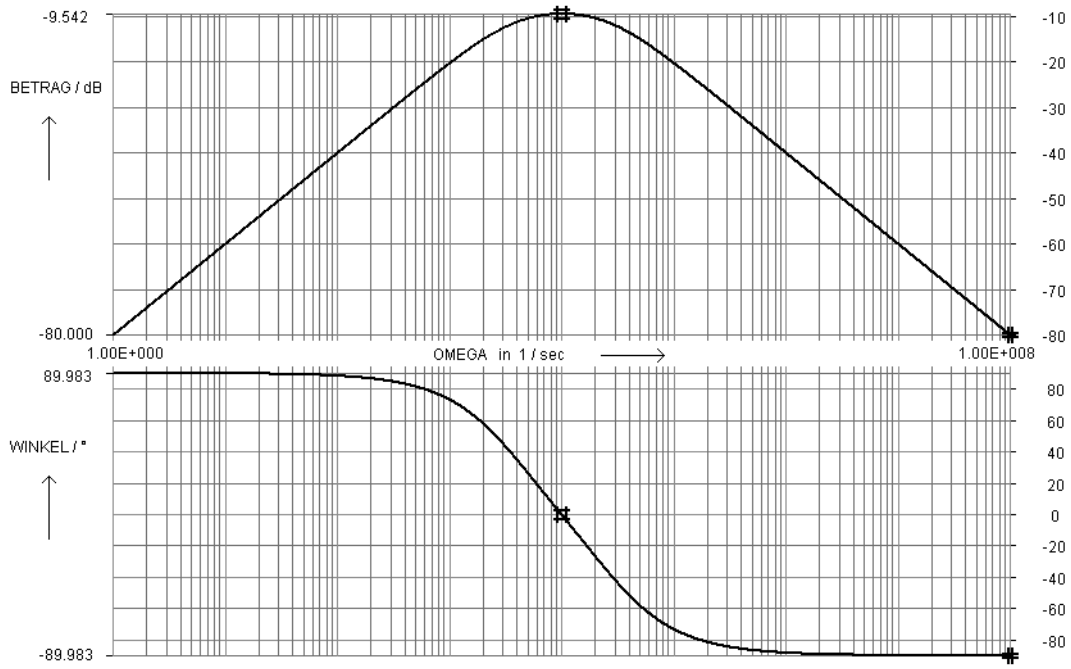
f.) Geben Sie $\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{j}\,\omega)$ an. Bei welcher Kreisfrequenz $\omega_0 > 0$ wird die Funktion reell? Welche komplexe Verstärkung $\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{j}\,\omega_\mathbf{0})$ besitzt das Netzwerk dort? Vergleich mit e.) für t$\rightarrow \infty$.

g.) Welche Filterwirkung tritt auf? Betrachten Sie dazu sowohl das Netzwerk als auch $\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{s})$.

h.) Ermitteln Sie die Winkel von $\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{j}\,\omega)$ bei den Kreisfrequenzen $\omega = \mathbf{0}$, $\omega_\mathbf{0}$, $\omega \rightarrow \infty$.



Oben: Bestandteile und Gesamtfunktion von $\mathbf{u_A(t)}$. Unten: Bode-Diagramm von $\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{j}\,\omega)$.



5.3 Per Faltungsintegral aus dem Eingangssignal und der EIA

In den Abschnitten 5.2.4, 5.2.5 und 5.2.6 wurde im Bildbereich der Laplace-Transformation die Berechnung der Bildfunktion des Ausgangssignals $\mathbf{\underline{A}(s)}$ per Multiplikation (Zeichen dafür '·') der Bildfunktion des Eingangssignals $\mathbf{\underline{E}(s)}$ und der Übertragungs-Funktion $\mathbf{\underline{G}(s)}$ durchgeführt.

Berechnung des Ausgangssignals im Bildbereich: $\boxed{\mathbf{\underline{A}(s) = \underline{E}(s) \cdot \underline{G}(s)}}$

Mit Hilfe der Faltungsoperation (Zeichen dafür '$*$') gelingt es auch direkt im Zeitbereich, aus dem Eingangssignal $\mathbf{e(t)}$ und der EIA $\mathbf{g(t)}$ (auch Gewichtsfunktion genannt) eines linearen Netzwerks das Ausgangssignal $\mathbf{a(t)}$ zu berechnen (Siehe dazu den Faltungssatz auf Seite 63).

Berechnung des Ausgangssignals im Zeitbereich: $\boxed{\mathbf{a(t) = e(t) * g(t)}}$

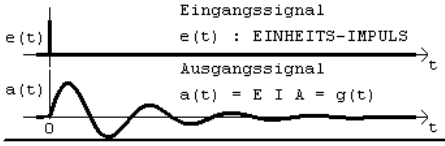
Abhängig vom Eingangssignal $\mathbf{e(t)}$ gilt hierzu bei kausalen Systemen [mit $\mathbf{g(t)|_{t<0} = 0}$] :

$$\mathbf{a(t)} = \mathbf{e(t) * g(t)} = \underbrace{\int_{\tau=0}^{t} e(\tau) \cdot g(t-\tau)\, d\tau}_{\mathbf{e(t)|_{t<0} = 0\ ;\ g(t)|_{t<0} = 0}} = \underbrace{\int_{\tau=-\infty}^{t} e(\tau) \cdot g(t-\tau)\, d\tau}_{\mathbf{e(t)}:\ \text{beliebig};\ \mathbf{g(t)|_{t<0} = 0}}$$

$$\mathbf{a(t)} = \mathbf{g(t) * e(t)} = \overbrace{\int_{\tau=0}^{t} g(\tau) \cdot e(t-\tau)\, d\tau}^{\mathbf{e(t)|_{t<0} = 0\ ;\ g(t)|_{t<0} = 0}} = \overbrace{\int_{\tau=0}^{\infty} g(\tau) \cdot e(t-\tau)\, d\tau}^{\mathbf{e(t)}:\ \text{beliebig};\ \mathbf{g(t)|_{t<0} = 0}}$$

5.3.1 Anschauliche Deutung der Faltung mit dem Programm FALTUNG

Mit dem Programm **FALTUNG** lässt sich wählbar für verschiedene Eingangssignale $\mathbf{e(t)}$ und für typische EIA $\mathbf{g(t)}$ von Systemen 1. oder 2. Ordnung die Entstehung des Ausgangssignals $\mathbf{a(t)}$ durch die Überlagerung verzögerter und bewerteter EIA veranschaulichen.

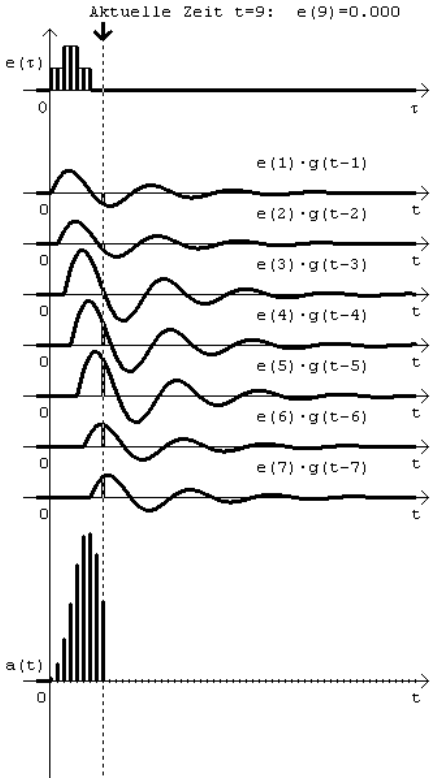


Lineares System : E I A = Einheits-Impuls-Antwort

E(s) → [Ü.-Fkt.: G(s) / E I A : g(t)] → A(s)= E(s) · G(s) [Produkt]

e(t) → a(t)= e(t) * g(t) [Faltung]

Faltungs-Integral: a(t) = Integral { e(τ) · g(t-τ) } dτ



Im oberen Bild auf der linken Seite wird das Eingangssignal e(tau) durch n=7 schmale Rechtecke ("Impulse") angenähert, deren Höhen den Werten von e zu den Zeitpunkten 1, 2, 3, 4, 5, 6 und 7 entsprechen. Sie sind mit e(1), e(2), e(3), e(4), e(5), e(6) und e(7) bezeichnet.

Die Zahl der "Impulse" n ist hier aus Platzgründen eingeschränkt.
[Exakte Lösung für n -> oo und per Integration statt Summation]

Mit einer der Tasten "Schritt" oder "Start" lässt sich die Zeit im Bereich 1 <= t <= 56 schrittweise oder automatisch vergrößern.

Als Reaktionen auf die einzelnen "Impulse" werden untereinander die sieben "Impulsantworten" als Funktionen der Zeit t dargestellt.

Sie entstehen jeweils aus der E I A g(t) durch
1. eine Multiplikation mit den Momentanwerten e(1), ... , e(7)
2. eine Zeitverschiebung bis zur Wirkung der "Impulse"
und damit erhält man die folgenden Zeitfunktionen.

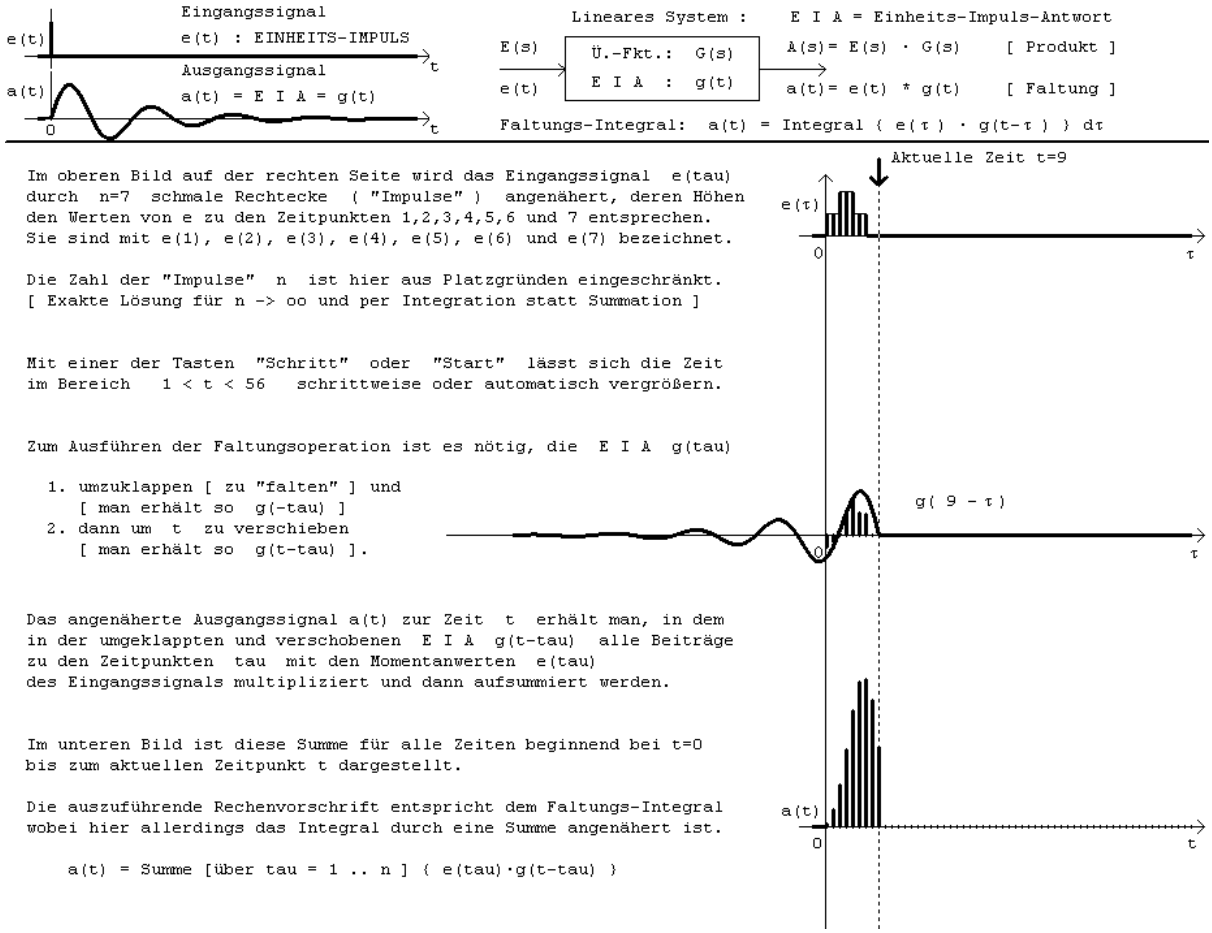
e(1)·g(t-1)	->	Antwort auf den 1. "Impuls"
e(2)·g(t-2)	->	Antwort auf den 2. "Impuls"
e(3)·g(t-3)	->	Antwort auf den 3. "Impuls"
e(4)·g(t-4)	->	Antwort auf den 4. "Impuls"
e(5)·g(t-5)	->	Antwort auf den 5. "Impuls"
e(6)·g(t-6)	->	Antwort auf den 6. "Impuls"
e(7)·g(t-7)	->	Antwort auf den 7. "Impuls"

Addiert man alle Beiträge auf, die zur aktuellen Zeit t wirken,
[im Bild findet man die Beiträge untereinander bei der Zeit t]
erhält man das angenäherte Ausgangssignal a(t).

a(t) = Summe [über tau = 1 .. n] { e(tau)·g(t-tau) }

Die Gesamtwirkung ermittelt man hier durch die Überlagerung (Superposition) der Einzelwirkungen aller "Impulse".

Mit dem Programm **FALTUNG** kann auch die Entstehung des Ausgangssignals $\mathbf{a(t)}$ wie bei der Anwendung des Faltungsintegrals dargestellt werden. Aus Gründen der Übersicht wird hier das Eingangssignal $\mathbf{e(t)}$ durch sieben schmale Rechtecke angenähert.



Die Ergebnisse der beiden Betrachtungen zur Faltung sind identisch aber die Darstellung auf Seite 75 ist leichter zu verstehen und bietet eine anschauliche Erklärung der Faltungsoperation.

Ü 52

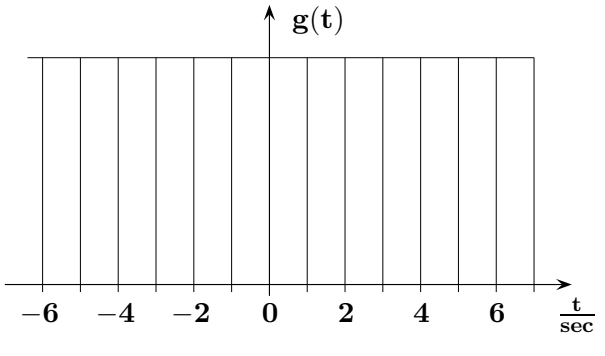
5.3.2 Beispiele zur Faltung

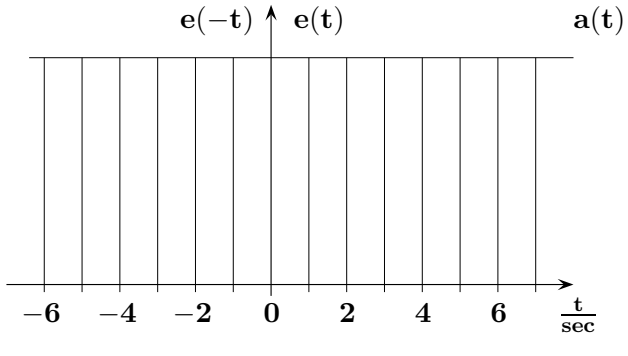
1. Gegeben ist das Eingangssignal eines linearen Netzwerkes $\mathbf{e(t)} = \begin{cases} \mathbf{U} & : \ \mathbf{0 < t \le T_0} \\ \mathbf{0\,V} & : \ \mathbf{sonst} \end{cases}$.

Das Netzwerk sei durch die Übertragungs-Funktion $\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{s}) = \dfrac{\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{s})}{\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{s})} = \dfrac{\mathbf{K}}{\mathbf{1 + s \cdot T}}$ beschrieben.

Es gelten folgende Werte: $\mathbf{U = 5\ V}$; $\mathbf{T_0 = 5\ sec}$; $\mathbf{K = 3}$; $\mathbf{T = 2\ sec}$.

a.) Ermitteln Sie mit Hilfe der Laplace-Tabelle die EIA $\mathbf{g(t)}$ des Netzwerkes.
b.) Tragen Sie unten die Verläufe von $\mathbf{g(t)}$ und $\mathbf{e(t)}$ zusammen mit $\mathbf{e(-t)}$ ein.
c.) Berechnen Sie per Faltungsintegral die Zeitfunktion am Ausgang $\mathbf{a(t) = g(t) * e(t)}$.
d.) Tragen Sie im Bild von $\mathbf{e(t)}$ auch den Verlauf von $\mathbf{a(t)}$ ein.
e.) Wie könnte man $\mathbf{a(t)}$ auch ausgehend von der Einheits-Sprungantwort ermitteln?
f.) Durch welche Schaltung könnte $\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{s})$ realisiert werden?

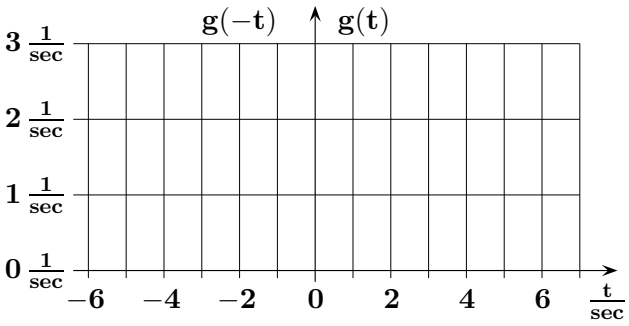


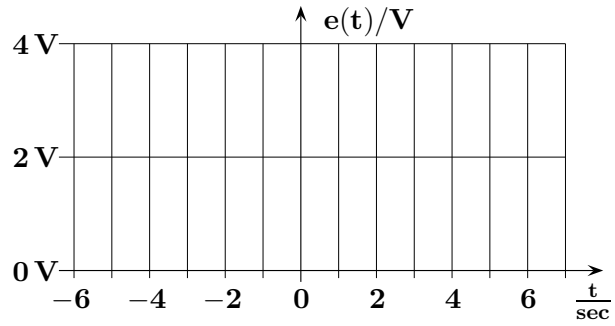


In allen Fällen, bei denen die beiden Zeitfunktionen $\mathbf{g(t)}$ und $\mathbf{e(t)}$ bereichsweise konstante Werte besitzen, kann die Faltungsoperation mit Hilfe von Flächenbetrachtungen durchgeführt werden.

2. Beispiel: Gegeben sind die EIA $\mathbf{g(t)}$ und das Eingangssignal $\mathbf{e(t)}$ eines linearen Netzwerkes

$$\mathbf{g(t)} = \begin{cases} \mathbf{3\,\frac{1}{sec}} & : \ \mathbf{0\,sec < t \le 1\,sec} \\ \mathbf{2\,\frac{1}{sec}} & : \ \mathbf{1\,sec < t \le 2\,sec} \\ \mathbf{1\,\frac{1}{sec}} & : \ \mathbf{2\,sec < t \le 3\,sec} \\ \mathbf{0\,\frac{1}{sec}} & : \ \mathbf{sonst} \end{cases} \quad ; \qquad \mathbf{e(t)} = \begin{cases} \mathbf{2\,V} & : \ \mathbf{0\,sec < t \le 1\,sec} \\ \mathbf{4\,V} & : \ \mathbf{1\,sec < t \le 2\,sec} \\ \mathbf{2\,V} & : \ \mathbf{2\,sec < t \le 3\,sec} \\ \mathbf{0\,V} & : \ \mathbf{sonst} \end{cases}$$





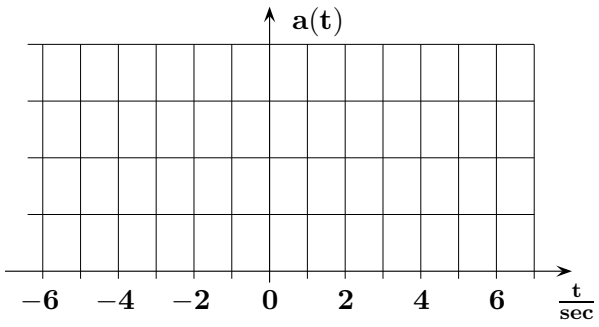
a.) Tragen Sie die Verläufe von $\mathbf{g(t)}$ zusammen mit $\mathbf{g(-t)}$ und $\mathbf{e(t)}$ in die Diagramme ein.

b.) Ermitteln Sie in der Tabelle die Werte von $\mathbf{a(t)}$ für die eingetragenen Zeitpunkte.
Verwenden Sie dazu die Bilder auf Seite 79.

$\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{sec}}$	Beiträge zu $\mathbf{a(t)} = \sum \mathbf{e}(\tau) \cdot \mathbf{g(t-\tau)} \cdot \mathbf{\Delta}\tau$	$\frac{\mathbf{a(t)}}{\mathbf{V}}$
0	$\mathbf{2\,V} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{sec}} \cdot \mathbf{1\,sec} - \mathbf{4\,V} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{sec}} \cdot \mathbf{1\,sec} - \mathbf{2\,V} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{sec}} \cdot \mathbf{1\,sec}$	
0.5	$\mathbf{2\,V} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{sec}} \cdot \mathbf{0.5\,sec} - \mathbf{4\,V} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{sec}} \cdot \mathbf{1\,sec} - \mathbf{2\,V} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{sec}} \cdot \mathbf{1\,sec}$	
1	$\mathbf{2\,V} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{sec}} \cdot \mathbf{1\,sec} - \mathbf{4\,V} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{sec}} \cdot \mathbf{1\,sec} - \mathbf{2\,V} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{sec}} \cdot \mathbf{1\,sec}$	
2	$\mathbf{2\,V} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{sec}} \cdot \mathbf{1\,sec} - \mathbf{4\,V} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{sec}} \cdot \mathbf{1\,sec} - \mathbf{2\,V} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{sec}} \cdot \mathbf{1\,sec}$	
3	$\mathbf{2\,V} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{sec}} \cdot \mathbf{1\,sec} - \mathbf{4\,V} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{sec}} \cdot \mathbf{1\,sec} - \mathbf{2\,V} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{sec}} \cdot \mathbf{1\,sec}$	
4	$\mathbf{2\,V} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{sec}} \cdot \mathbf{1\,sec} - \mathbf{4\,V} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{sec}} \cdot \mathbf{1\,sec} - \mathbf{2\,V} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{sec}} \cdot \mathbf{1\,sec}$	
5	$\mathbf{2\,V} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{sec}} \cdot \mathbf{1\,sec} - \mathbf{4\,V} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{sec}} \cdot \mathbf{1\,sec} - \mathbf{2\,V} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{sec}} \cdot \mathbf{1\,sec}$	
6	$\mathbf{2\,V} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{sec}} \cdot \mathbf{1\,sec} - \mathbf{4\,V} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{sec}} \cdot \mathbf{1\,sec} - \mathbf{2\,V} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{sec}} \cdot \mathbf{1\,sec}$	
7	$\mathbf{2\,V} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{sec}} \cdot \mathbf{1\,sec} - \mathbf{4\,V} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{sec}} \cdot \mathbf{1\,sec} - \mathbf{2\,V} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{sec}} \cdot \mathbf{1\,sec}$	

c.) Welchen allgemeinen Schluss für Zwischenwerte ziehen Sie aus dem Ergebnis bei t = 0.5 sec?

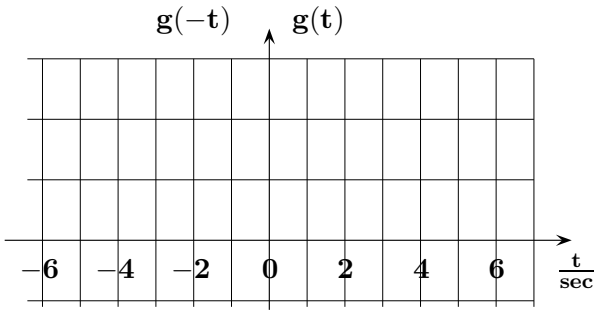
d.) Zeichnen Sie den Verlauf von $\mathbf{a(t)}$ im vorbereiteten Diagramm ein.

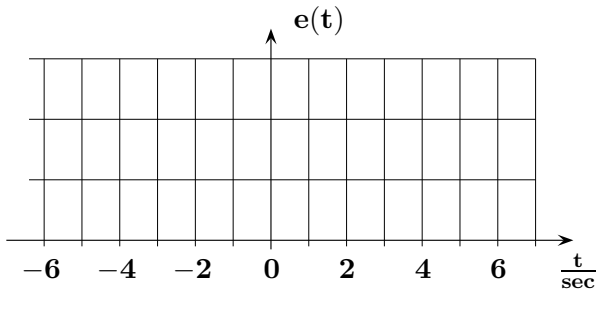


Sind Eingangsfunktionen $\mathbf{e(t)}$ zu betrachten, die auch bei negativen Zeiten von Null verschieden sind, müssen die Integrationsgrenzen diesem Sachverhalt angepasst werden.

3. Beispiel: Gegeben sind die EIA $\mathbf{g(t)}$ und das Eingangssignal $\mathbf{e(t)}$ eines LTI-Netzwerks.
Ein solches Netzwerk verhält sich linear und ändert seine Eigenschaften nicht mit der Zeit.

$$\mathbf{g(t)} = \begin{cases} -1\,\frac{1}{\mathrm{sec}} & : \quad 0\,\mathrm{sec} < t \le 1\,\mathrm{sec} \\ 3\,\frac{1}{\mathrm{sec}} & : \quad 1\,\mathrm{sec} < t \le 2\,\mathrm{sec} \\ 1\,\frac{1}{\mathrm{sec}} & : \quad 2\,\mathrm{sec} < t \le 3\,\mathrm{sec} \\ 0\,\frac{1}{\mathrm{sec}} & : \quad \mathrm{sonst} \end{cases} \quad ; \quad \mathbf{e(t)} = \begin{cases} 3\,\mathrm{V} & : \quad -2\,\mathrm{sec} < t \le -1\,\mathrm{sec} \\ 2\,\mathrm{V} & : \quad -1\,\mathrm{sec} < t \le 1\,\mathrm{sec} \\ 3\,\mathrm{V} & : \quad 1\,\mathrm{sec} < t \le 2\,\mathrm{sec} \\ 0\,\mathrm{V} & : \quad \mathrm{sonst} \end{cases}$$



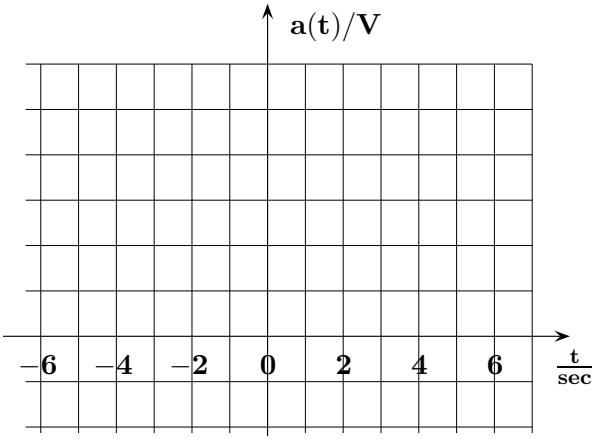


a.) Tragen Sie die Verläufe von $\mathbf{g(t)}$ zusammen mit $\mathbf{g(-t)}$ und $\mathbf{e(t)}$ in die Diagramme ein.

b.) Tragen Sie an allen Signalsprungstellen die Werte von $\mathbf{a(t)}$ in der Tabelle ein.
Verwenden Sie dazu die Bilder auf Seite 81.

$\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{sec}}$	Beiträge zur Ausgangsspannung $\frac{\mathbf{a(t)}}{\mathbf{V}} = \sum \frac{\mathbf{e}(\tau)}{\mathbf{V}} \cdot \frac{\mathbf{g(t-\tau)}}{\mathbf{1/sec}} \cdot \frac{\mathbf{\Delta}\tau}{\mathbf{sec}}$	$\frac{\mathbf{a(t)}}{\mathbf{V}}$
-2	$\mathbf{3}\cdot[\quad]\cdot\mathbf{1} + \mathbf{2}\cdot[\quad]\cdot\mathbf{1} + \mathbf{2}\cdot[\quad]\cdot\mathbf{1} + \mathbf{3}\cdot[\quad]\cdot\mathbf{1}$	
-1	$\mathbf{3}\cdot[\quad]\cdot\mathbf{1} + \mathbf{2}\cdot[\quad]\cdot\mathbf{1} + \mathbf{2}\cdot[\quad]\cdot\mathbf{1} + \mathbf{3}\cdot[\quad]\cdot\mathbf{1}$	
0	$\mathbf{3}\cdot[\quad]\cdot\mathbf{1} + \mathbf{2}\cdot[\quad]\cdot\mathbf{1} + \mathbf{2}\cdot[\quad]\cdot\mathbf{1} + \mathbf{3}\cdot[\quad]\cdot\mathbf{1}$	
1	$\mathbf{3}\cdot[\quad]\cdot\mathbf{1} + \mathbf{2}\cdot[\quad]\cdot\mathbf{1} + \mathbf{2}\cdot[\quad]\cdot\mathbf{1} + \mathbf{3}\cdot[\quad]\cdot\mathbf{1}$	
2	$\mathbf{3}\cdot[\quad]\cdot\mathbf{1} + \mathbf{2}\cdot[\quad]\cdot\mathbf{1} + \mathbf{2}\cdot[\quad]\cdot\mathbf{1} + \mathbf{3}\cdot[\quad]\cdot\mathbf{1}$	
3	$\mathbf{3}\cdot[\quad]\cdot\mathbf{1} + \mathbf{2}\cdot[\quad]\cdot\mathbf{1} + \mathbf{2}\cdot[\quad]\cdot\mathbf{1} + \mathbf{3}\cdot[\quad]\cdot\mathbf{1}$	
4	$\mathbf{3}\cdot[\quad]\cdot\mathbf{1} + \mathbf{2}\cdot[\quad]\cdot\mathbf{1} + \mathbf{2}\cdot[\quad]\cdot\mathbf{1} + \mathbf{3}\cdot[\quad]\cdot\mathbf{1}$	
5	$\mathbf{3}\cdot[\quad]\cdot\mathbf{1} + \mathbf{2}\cdot[\quad]\cdot\mathbf{1} + \mathbf{2}\cdot[\quad]\cdot\mathbf{1} + \mathbf{3}\cdot[\quad]\cdot\mathbf{1}$	

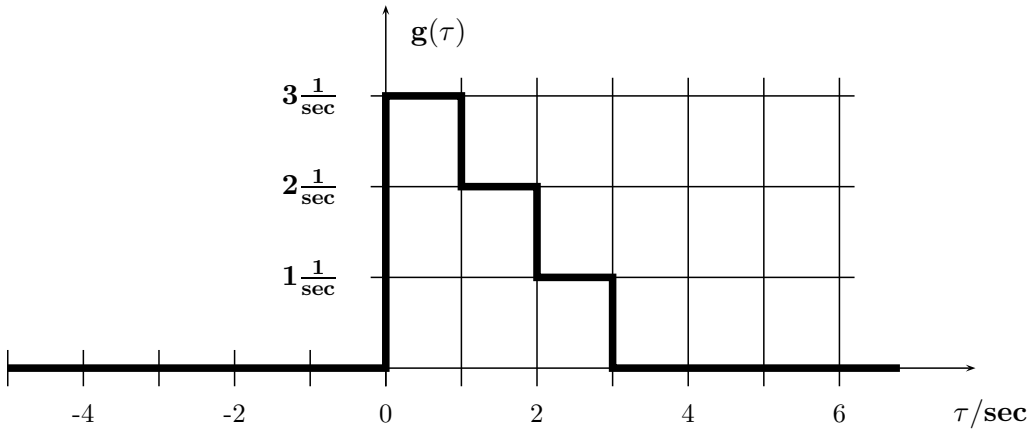
c.) Zeichnen Sie den Verlauf von $\mathbf{a(t)}$ in das vorbereitete Diagramm ein.



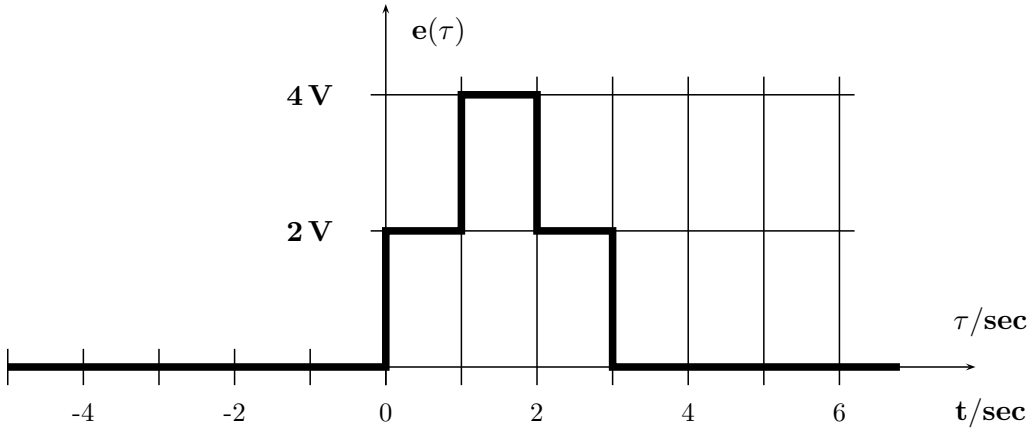
Ü 51

Graphische Durchführung der Faltungsoperation im Zeitbereich (Bsp. auf Seite 77)

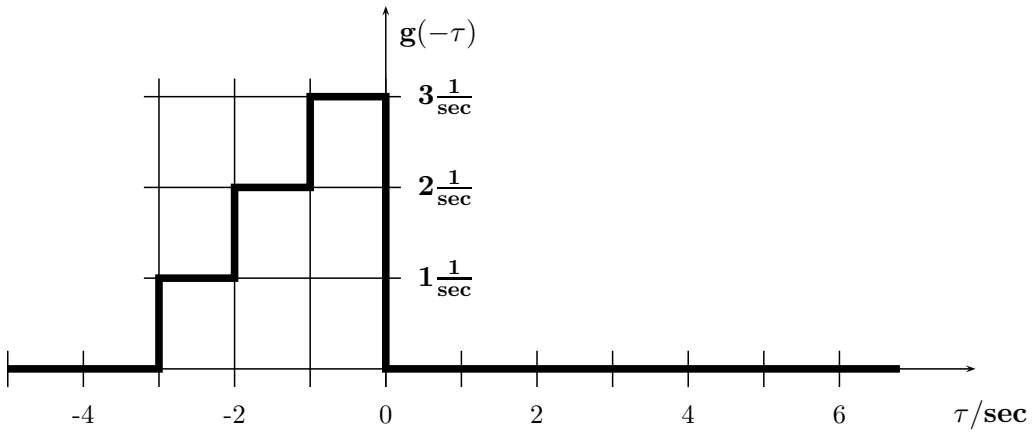
Einheits-Impulsantwort $\mathbf{g}(\tau)$



Eingangssignal $\mathbf{e}(\tau)$



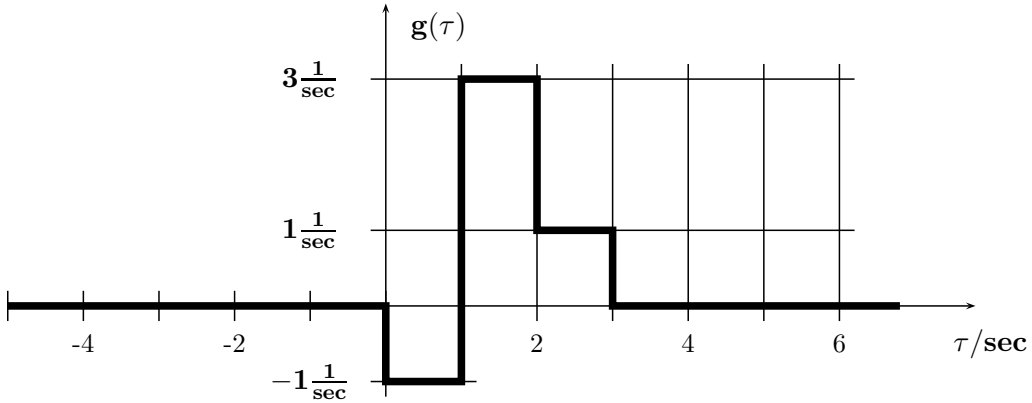
⇓ Trennen Sie das untere Bild vorsichtig an der durchgezogenen Linie ab ⇓



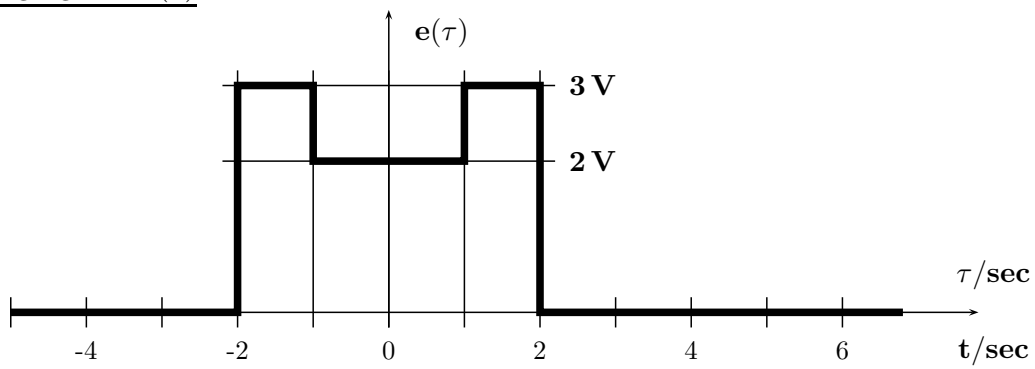
Umgeklappte Einheits-Impulsantwort $\mathbf{g}(-\tau)$ zum Beispiel auf Seite 77 Zu Seite 79

Graphische Durchführung der Faltungsoperation im Zeitbereich (Bsp. auf Seite 78)

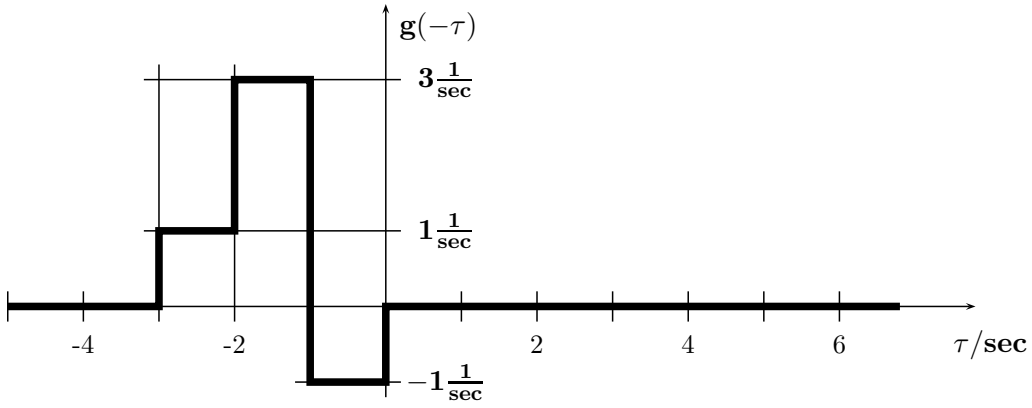
Einheits-Impulsantwort $\mathbf{g}(\tau)$



Eingangssignal $\mathbf{e}(\tau)$



⇓ Trennen Sie das untere Bild vorsichtig an der durchgezogenen Linie ab ⇓



Umgeklappte Einheits-Impulsantwort $\mathbf{g}(-\tau)$ zum Beispiel auf Seite 78 Zu Seite 81

6 Zeitdiskrete Signale

Ü 53

Bisher wurden nur 'analoge' Signale wie z. B. $\mathbf{u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega\, t)}$ betrachtet, die

1. zu jedem Zeitpunkt definiert (also 'zeitkontinuierlich') sind und
2. innerhalb eines bestimmten Signalbereiches [z. B. $-\hat{\mathbf{u}} \le \mathbf{u(t)} \le +\hat{\mathbf{u}}$] jeden Zwischenwert annehmen können (also 'wertkontinuierlich' sind).

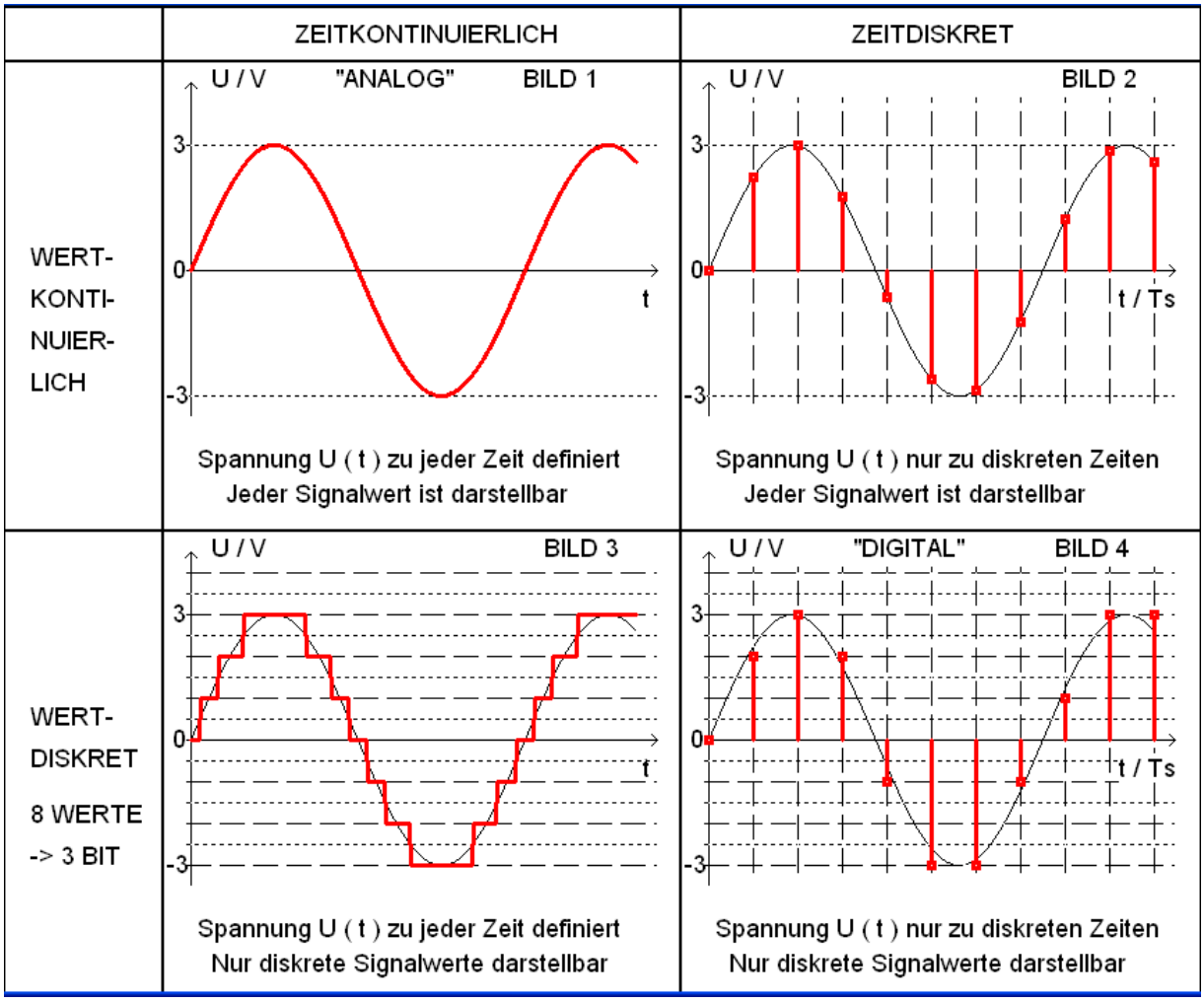
Liegen dagegen Signale vor, die nur zu bestimmten, üblicherweise äquidistanten Zeitpunkten im Abstand $\mathbf{T_S}$ definiert sind, nennt man sie 'zeitdiskret'.

Kann ein Signal (in einem vorgegebenen Signalbereich) nur gewisse Werte annehmen, die durch ein äquidistantes Raster vorgegeben sind, nennt man es 'wertdiskret'.

Ist ein Signal zeit- und wertkontinuierlich, nennt man es auch ein 'analoges' Signal.
Ist es dagegen zeit- und wertdiskret, wird es auch als 'digitales' Signal bezeichnet.

6.1 Übersicht der gebräuchlichen Signaldarstellungen

Ausgehend von dem 'analogen' Signal einer zeit- und wertkontinuierlichen, sinusförmigen Spannung in Bild 1 sollen nun die gebräuchlichen Signaldarstellungen erläutert werden.



Tastet man das 'analoge' Signal mit einem Schalter ab, der nur für $\mathbf{t = n \cdot T_S}$ kurzzeitig schließt, erhält man das zeitdiskrete Signal in Bild 2, das aber weiterhin wertkontinuierlich ist.

Die Zeit $\mathbf{T_S}$ wird als ABTASTZEIT oder SAMPLINGTIME bezeichnet; in den Bildern 2 und 4 sind die Abtastzeitpunkte als senkrechte gestrichelte Linien eingetragen.

Bei der ausreichend schnellen Abtastung eines bandbegrenzten Signals ist dies ein linearer Vorgang, der keinerlei Verzerrungen hervorruft und auch keinen Informationsverlust des Signals zur Folge hat.

Kann ein zeitkontiniuerliches Signal nur bestimmte Werte (in den Bildern 3 und 4 auf Seite 83 sind dies die Spannungen -3 V, -2 V, -1 V, 0 V, +1 V, +2 V, +3 V, +4 V die als waagrechte gestrichelte Linien eingetragen sind) annehmen, liegt eine wertemäßige Diskretisierung vor.

Die Quantisierung nimmt ein A/D-Wandler vor, dessen Genauigkeit durch die Zahl der darstellbaren Werte bestimmt ist und in Bit angegeben wird. Bei diesem Vorgang wird die Kurvenform verändert: Es entstehen nichtlineare Verzerrungen, die sich als 'Quantisierungsgeräusch' bemerkbar machen.

Im Unterschied zum Beispiel (mit nur 2^3=8 Werten $\widehat{=}$ 3 Bit) werden in der Praxis feinere Abstufungen (z.B. 2^{16}=65 536 Werte $\widehat{=}$ 16 Bit bis zu 2^{24}=16 777 216 Werte $\widehat{=}$ 24 Bit) verwendet.

Die in den Bildern 3 und 4 mit Punkten eingetragenen Linien verlaufen genau zwischen den möglichen Werten und legen fest, ob das Signal bei der Quantisierung zum nächsten Wert hin auf- oder abzurunden ist. Das wertdiskrete Signal in Bild 3 bleibt trotz der Quantisierung zeitkontinuierlich.

Teilt man den aktuellen Wert durch den Abstand benachbarter Werte (die so genannte Stufenhöhe), erhält man für jeden Abtastwert eine ganze Zahl mit Vorzeichen.

Kombiniert man die Abtastung mit einer Quantisierung, entsteht das 'digitale' Signal in Bild 4.
Nur zu den Abtastzeitpunkten steht das wertdiskrete Signal als eine Zahlenfolge zur Verfügung, die dann z.B. mit einem (Spezial-) Rechner (genannt digitaler Signalprozessor, DSP) weiter verarbeitet werden kann.

Das unten dargestellte Bild zeigt am Beispiel der Spannung

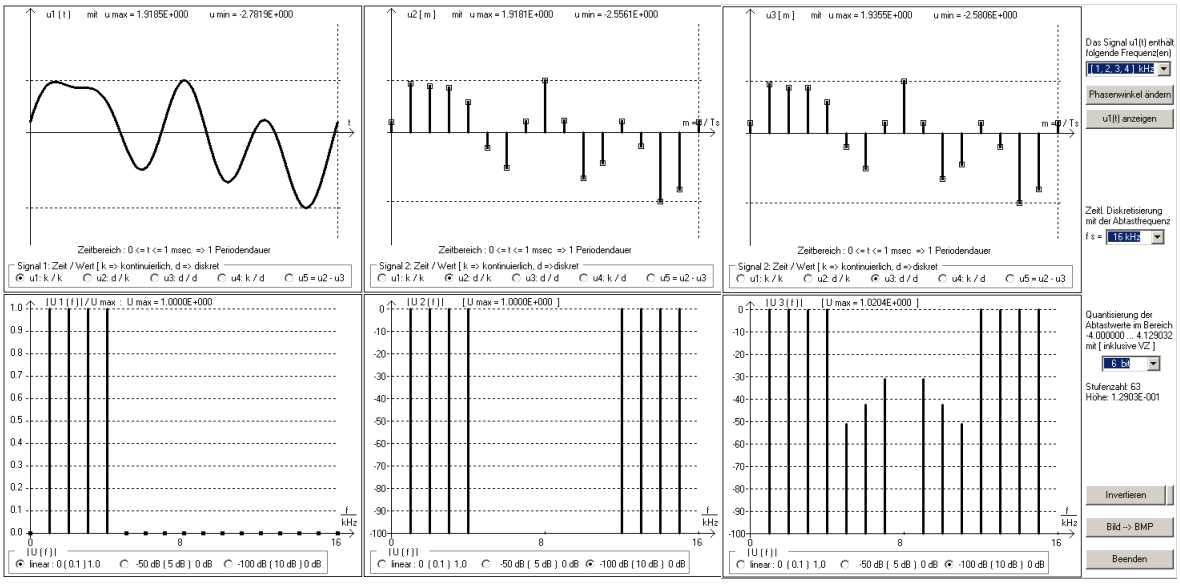
$$\mathbf{u(t) = 1\,V \cdot \sum_{\mu=1}^{4} sin(2 \cdot \pi \cdot \mu\,kHz \cdot t + \varphi_\mu)}$$

die Veränderungen im Linienspektrum, die durch Signalmanipulationen hervorgerufen werden.
Die Berechnungen erfolgten mit dem Programm **SIGNALE**.

Linke Spalte: Signal ist periodisch, wertkontinuierlich, zeitkontinuierlich ('analog')
Vier Frequenzen → vier Spektrallinien

Mittlere Spalte: Signal ist periodisch, wertkontinuierlich, zeitdiskret: Abtastung mit $\mathbf{f_S = 16\,kHz}$
Vier Frequenzen → vier Spektrallinien und deren periodische Wiederholungen

Rechte Spalte: Signal ist periodisch, wertdiskret (2^6=64 Werten $\widehat{=}$ 6 Bit), zeitdiskret wie vorher
Durch Quantisierungsfehler treten weitere, unerwünschte Spektrallinien auf.



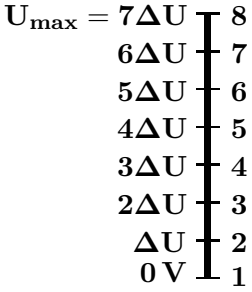
6.1.1 Quantisierung mit Analog-Digital-Wandlern

Bei der Verwendung von A/D-Wandlern (oft kurz als 'ADC' Analog-Digital-Converter bezeichnet) sind einige Besonderheiten zu beachten.

1. Wandlung unipolarer Spannungen: $\mathbf{0 \le U \le U_{max}}$

Ü 54

Spannung Stufen-Nr.

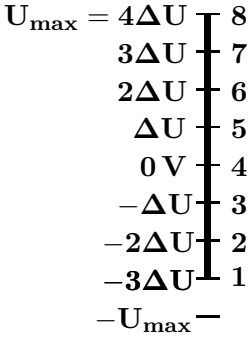


Größe	Bei $\mathbf{N = 3}$ Bit gilt	Bei $\mathbf{N}$ Bit gilt
Stufenanzahl	$\mathbf{n = 2^3 - 1 = 7}$	$\mathbf{n = 2^N - 1}$
Stufenhöhe	$\mathbf{\Delta U = \frac{U_{max}}{7}}$	$\mathbf{\Delta U = \frac{U_{max}}{n}}$
Verfügbare Werte	$\mathbf{0\,V (\Delta U) U_{max}}$	$\mathbf{0\,V (\Delta U) U_{max}}$

Manche ADC erlauben den Betrieb mit dem invertierten Wertebereich $\mathbf{-U_{max} (\Delta U) 0\,V}$.

2. Wandlung bipolarer Spannungen: Spannungsbereich nahezu symmetrisch zu 0 V

Spannung Stufen-Nr.



Größe	Bei $\mathbf{N = 3}$ Bit gilt	Bei $\mathbf{N}$ Bit gilt
Stufenanzahl	$\mathbf{n = 2^3 - 1 = 7}$	$\mathbf{n = 2^N - 1}$
Stufenhöhe	$\mathbf{\Delta U = \frac{2U_{max}}{8}}$	$\mathbf{\Delta U = \frac{2U_{max}}{n+1} = \frac{2U_{max}}{2^N}}$
Verfügbare Werte	$\mathbf{-U_{max} + \Delta U (\Delta U) U_{max}}$	$\mathbf{-U_{max} + \Delta U (\Delta U) U_{max}}$

$\Longleftarrow$ ACHTUNG: Der Wert $\mathbf{-U_{max}}$ ist hier nicht darstellbar!

Manche ADC erlauben den Betrieb mit dem invertiertem Wertebereich $\mathbf{-U_{max} (\Delta U) U_{max} - \Delta U}$.

Bei der A/D-Wandlung entsteht ein Quantisierungsfehler mit dem Maximalwert $\mathbf{|\Delta U_q| = \frac{\Delta U}{2}}$

Nr.	von	bis	N	n	unip/bip	U_{max}	ΔU	ΔU_q	U_{min}
1	0 V	+10 V	7	$\mathbf{\ge 100}$	unip	10 V	78.74 mV	39.37 μV	0 V
2	-5 V	+10 V	8	**255**	bip	10 V	78.13 mV	39.06 μV	-9.9219 V
3	-10 V	+8 V	**10**	1023	bip	10.02 V	19.57 mV	9.78 mV	-10 V
4	0 V	+12 V	14	$\mathbf{\ge 9200}$	unip	12 V	732.5 μV	366.2 μV	0 V
5	0 V	+5 V	13	8191	unip	5 V	$\mathbf{\le 1mV}$	305.2 μV	0 V
6	-10 V	+10 V	10	1023	bip	10.02 V	19.57 mV	$\mathbf{\le 10mV}$	-10 V

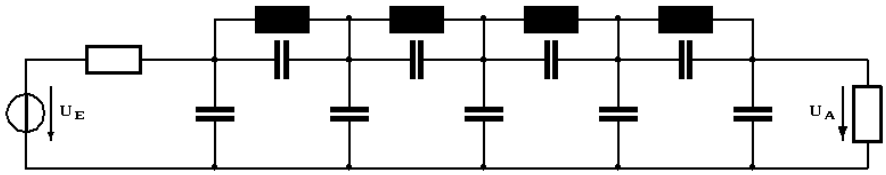
6.1.2 Besonderheiten der analogen und der digitalen Signalverarbeitung

Am Beispiel einer Filterschaltung mit sehr anspruchsvollen Vorgaben werden auf Seite 86 die Besonderheiten einer analogen Realisierung mit denen einer digitalen Lösung verglichen.

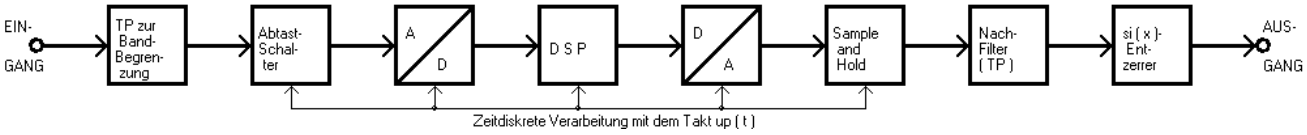
Das Tiefpassfilter soll im Durchlassbereich ($\mathbf{0 \le f \le 210\ Hz}$) eine Dämpfung $\mathbf{a_D \le 0.05\ dB}$ und im Sperrbereich ($\mathbf{f \ge 290\ Hz}$) eine Dämpfung $\mathbf{a_S \ge 80\ dB}$ besitzen.

Für die analoge Lösung eignet sich ein Cauer-Tiefpass 9. Ordnung. Hier wird einer passiven RLC-Schaltung der Vorzug vor einer aktiven RC-Anordnung gegeben, da zum prinzipiellen Verständnis der passiven Schaltung keine Kenntnisse der Schaltungstechnik mehrfach rückgekoppelter Operationsverstärker erforderlich sind.

Analoge Signalverarbeitung in einem RLC-Tiefpass neunter Ordnung (C 09 10 50).



Grobaufbau einer Anordnung zur digitalen Signalverarbeitung (Details folgen später).



	Analoge Verarbeitung	Digitale Verarbeitung
Allgemeine Vorteile	keine Zusatzschaltungen nötig, hohe Verarbeitungsgeschwindigkeit möglich	an Stelle von Bauelmentewerten bestimmen hier digital abgespeicherte Koeffizienten das Verhalten, die ihre Werte über lange Zeit und in einem weiten Temperaturbereich beibehalten, Änderungen der Vorgaben lassen sich meist im Block DSP als Softwaremodifikationen einarbeiten, für nahezu alle Aufgaben sind leistungsfähige Algorithmen verfügbar
Vorteile im Beispiel	keine Stromversorgung und damit keine zusätzliche Verlustleistung, keine Takterzeugung erforderlich, keine Einstreuung von Taktsignalen	kein Abgleich nötig, keine Bauelemente-Selektion mit engen Toleranzen nötig, überwiegend Standardbausteine im Einsatz, si-Entzerrer kann in den Block DSP verlegt werden, Rechenleistung eines DSP reicht für diese Aufgabe auch bei niedriger Taktfrequenz aus
Allgemeine Nachteile	Alterungsprobleme, Langzeitstabilität, Temperaturabhängigkeit der Bauelementewerte, Toleranzauswirkungen, nichtideale Bauelemente führen zu Abweichungen vom Wunschverhalten, schon kleine Änderungen der Vorgaben erfordern meist Änderungen der Hardware	erheblicher Zusatzaufwand durch Vor- und Nachfilter, Sample and Hold, A/D- und D/A-Wandler, Entzerrer, auch analoge Schaltungen erforderlich, Begrenzung der Maximalfrequenz durch zulässige Taktfrequenz, DSP bearbeitet nacheinander verschiedene Teilaufgaben, getrennte Stromversorgungen für analoge und digitale Schaltung nötig, Takterzeugung erforderlich
Nachteile im Beispiel	engtolerierte R und C nötig, genauer Abgleich der L, Spulengüte bei tiefen Frequenzen gering: $\mathbf{Q = \frac{\omega L}{R_{cu}}}$, L groß, schwer und teuer	(einfache) analoge Filter nötig, für diese Aufgabe ist ein Signalprozessor mit genauer Zahlendarstellung erforderlich

Zusammenfassung: Bei Systemen, die in größeren Stückzahlen gefertigt werden sollen und bei nicht zu hohen Frequenzen eine komplizierte Signalverarbeitung (linear/nichtlinear) benötigen, ist die digitale Signalverarbeitung der analogen (deutlich) überlegen.

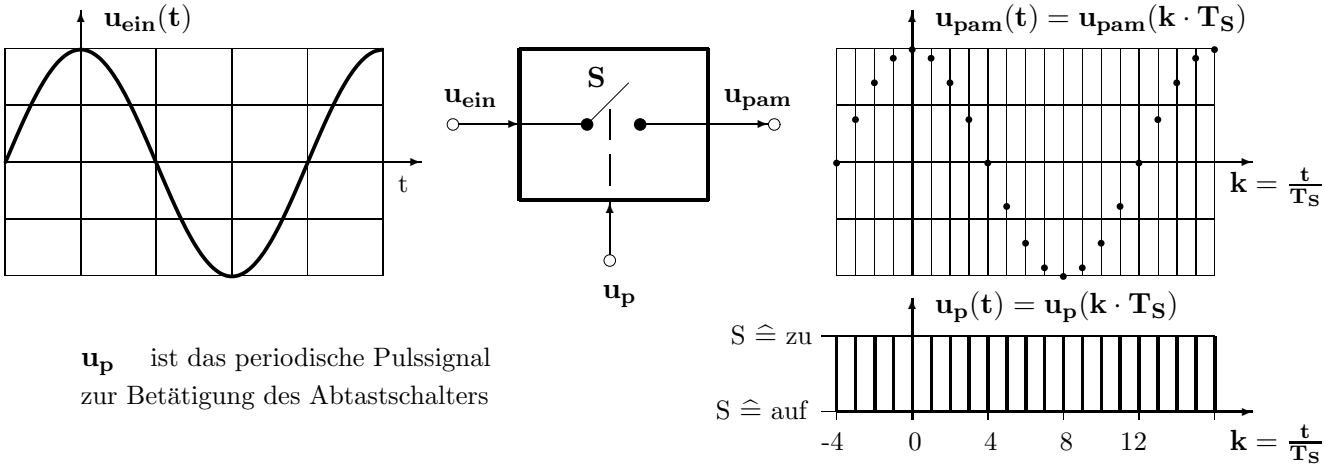
6.2 Signalabtastung

Dieser Abschnitt behandelt den Vorgang der Abtastung und beschreibt wichtige zeitdiskrete Signale.

6.2.1 Die Abtastung, das periodische Spektrum, Signalrückgewinnung

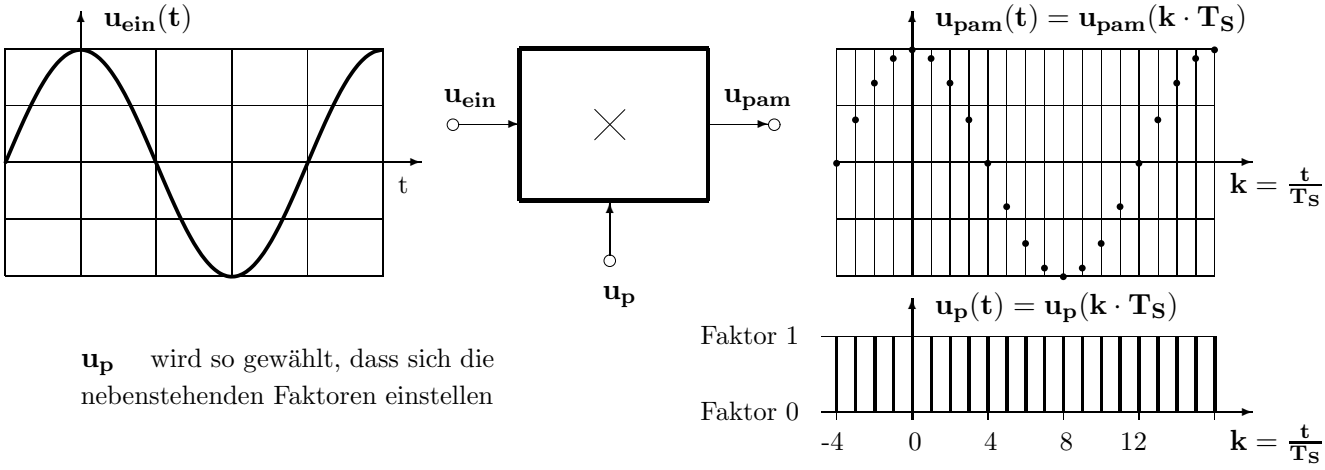
Für die praktische Ausführung der Abtastung eignen sich prinzipiell die folgenden Bauelemente:

- (Elektronisch betätigter) Abtastschalter



$\mathbf{u_p}$ ist das periodische Pulssignal zur Betätigung des Abtastschalters

- Analog-Multiplizierer



$\mathbf{u_p}$ wird so gewählt, dass sich die nebenstehenden Faktoren einstellen

Das zeitdiskrete Ausgangssignal des Abtasters $\mathbf{u_{pam}(t) = u_{pam}(k \cdot T_S)}$ (PAM steht für Puls- Amplituden-Modulation) besteht aus einer Impulsfolge, deren Amplituden den Momentanwerten des zeitkontinuierlichen Signals $\mathbf{u_{ein}(t = k \cdot T_S)}$ entsprechen.

Vor der Berechnung des Spektrums von $\mathbf{u_{pam}(t)}$ wird zunächst das Signal $\mathbf{u_p(t)}$ näher betrachtet.

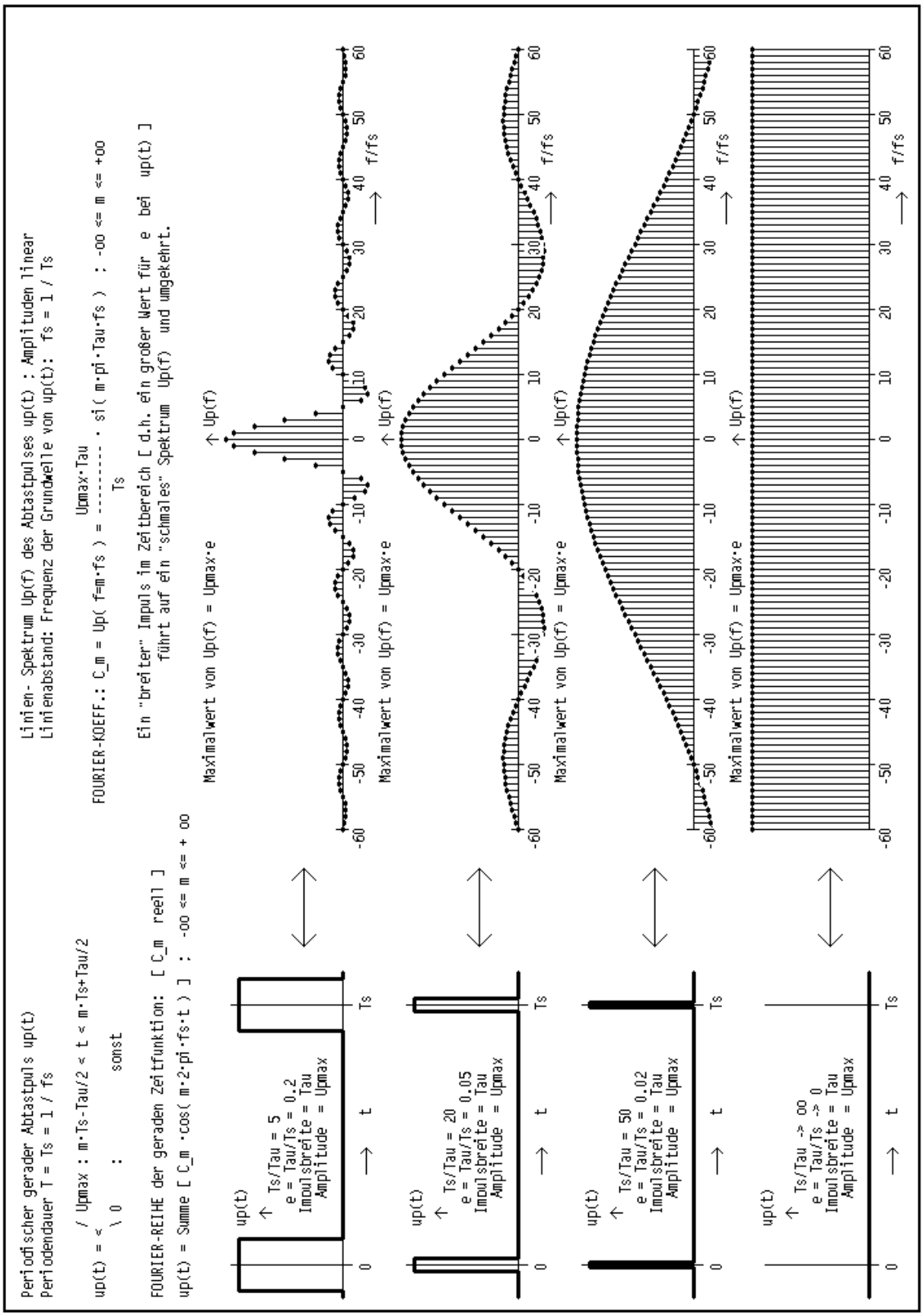
Auf Seite 88 ist das periodische, nichtsinusförmige und gerade Signal dargestellt, dessen Periodendauer $\mathbf{T = T_S}$ beträgt. Die Grundfrequenz $\mathbf{f_1 = f_S = \frac{1}{T_S}}$ bestimmt den Abstand der Spektrallinien. Wegen der geraden Symmetrie sind die komplexen Fourier-Koeffizienten $\mathbf{\underline{c}_m}$ hier reell. In der zugehörigen Fourier-Reihe treten deshalb ausschließlich cosinus-Anteile auf.

Die Umhüllende der $\mathbf{\underline{c}_m}$ folgt der Funktion $\mathbf{si\,(m\,\pi\,\tau\,f_S)}$ und besitzt ihre erste Nullstelle bei

$$\mathbf{m \cdot \pi \cdot \tau \cdot f_S = \pm\pi} \quad \text{d.h.} \quad \mathbf{\pm m = \frac{1}{\tau \cdot f_S} = \frac{T_S}{\tau} = \frac{1}{e}} \; .$$

Aus dieser Gleichung und aus den Linienspektren auf Seite 88 folgt, dass 'breite' Impulse im Zeitbereich (d.h. $\mathbf{e = \frac{\tau}{T_S}}$ groß) zu 'schmalen' Linienspektren mit Nullstellen bei $\mathbf{\pm\mu = \frac{1}{e}}$ führen.

Zeitverläufe und Spektren eines Abtastpulses mit variabler Einschaltdauer



Betrachtet man eine Folge von Dirac-Impulsen mit $\mathbf{U_{p\,max} \cdot Tau = 1\,Vsec}$ als idealisiertes Abtastsignal $\mathbf{u_p(t)}$, besitzt dieses ein unendlich ausgedehntes Linienspektrum mit Anteilen bei ganzzahligen Vielfachen seiner Grundfrequenz, der 'Abtast-' oder 'Samplingfrequenz' $\mathbf{f_S = \frac{1}{T_S}}$.

Bei dieser besonderen, geraden Zeitfunktion des Abtastpulses sind wegen $\mathbf{si(x)|_{x=0} = 1}$ alle komplexen Fourier-Koeffizienten nach dem Bild auf Seite 88 unten gleich und reell:

$$\mathbf{c = \underline{c}_m = U_{p\,max} \cdot \frac{Tau}{T_S} = \frac{1\,Vsec}{T_S}} \ .$$

Damit erhält man die Fourier-Reihe für das periodische Abtastsignal in Gl.(1).

$$\boxed{\mathbf{u_p(t) = \frac{1\,Vsec}{T_S} \sum_{m=-\infty}^{\infty} cos(\,m \cdot 2\pi f_S \cdot t\,)}} \qquad (\,1\,)$$

Mit diesem Puls soll nun das cosinusförmige Signal nach Gl.(2) mit der Signalfrequenz $\mathbf{f_{ein}}$

$$\boxed{\mathbf{u_{ein}(t) = \hat{u}_{ein} \cdot cos(\,2\pi f_{ein} \cdot t\,)}} \qquad (\,2\,)$$

per (idealer Analog-) Multiplikation abgetastet werden:

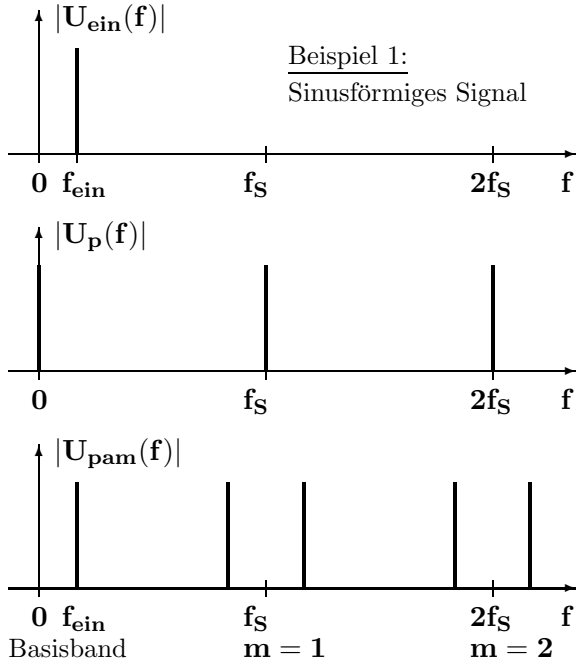
$$\mathbf{u_{pam}(t) = \frac{u_p(t) \cdot u_{ein}(t)}{1\,V} = [\ \frac{1\,sec}{T_S} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} cos(\,m \cdot 2\pi f_S \cdot t\,)\ ] \cdot [\ \hat{u}_{ein} \cdot cos(\,2\pi f_{ein} \cdot t\,)\ ]}$$

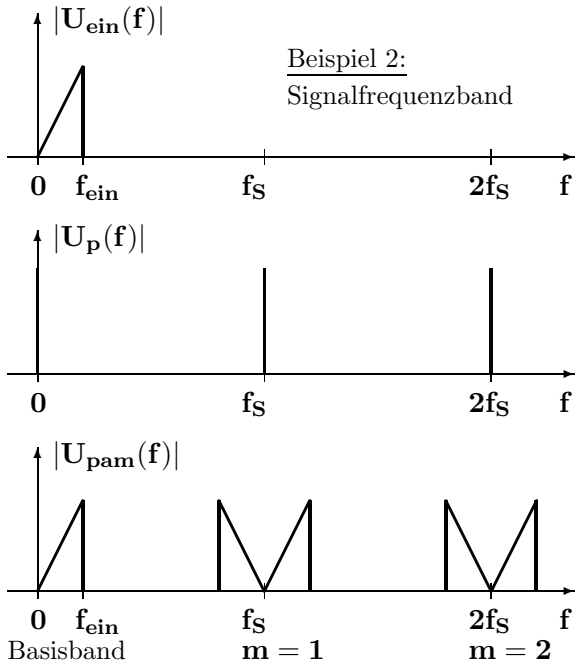
$$\mathbf{u_{pam}(t) = \frac{1\,sec}{T_S} \cdot \hat{u}_{ein} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} cos(\underbrace{m \cdot 2\pi f_S \cdot t}_{\alpha}) \right] \cdot cos(\underbrace{2\pi f_{ein} \cdot t}_{\beta}).}$$

Durch Umformung mit $\mathbf{cos\,\alpha \cdot cos\beta = \frac{1}{2}[\,cos(\alpha - \beta) + cos(\alpha + \beta)\,]}$ erhält man daraus

$$\boxed{\mathbf{u_{pam}(t) = \frac{\hat{u}_{ein} \cdot 1\,sec}{2\,T_S} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} cos(\,2\pi[\,m \cdot f_S \pm f_{ein}\,] \cdot t\,) \right\}}} \qquad (\,3\,)$$

Eine graphische Darstellung von Gl. (3) zeigt schematisch (hier sind aus Gründen der Übersichtlichkeit nur die positiven Frequenzen für m = 0, 1, 2 dargestellt) die unendliche, periodische Wiederholung des Signalspektrums als Folge der idealisierten Abtastung.





Neben dem Signal im 'Basisband' (m=0) treten beliebig viele Wiederholungen dieses Spektrums in 'Regellage' ($\mathbf{m \cdot f_S + f_{ein}}$) und in 'Kehrlage' ($\mathbf{m \cdot f_S - f_{ein}}$) auf.

Diese Begriffe werden bei der Betrachtung eines Signalfrequenzbandes anschaulich klar, das in der rechten Bildhälfte als Beispiel 2 dargestellt ist.

Vergrößert man bei konstanter Abtastfrequenz $\mathbf{f_S}$ die (maximale) Signalfrequenz $\mathbf{f_{ein}}$, bewegen sich die Linien im Spektrum des 1. Beispiels auf Seite 89 paarweise aufeinander zu.

Je zwei Linien fallen genau zusammen, wenn für die Signalfrequenz gilt $\mathbf{f_{ein} = 0.5 \cdot f_S}$.

Zur Signalrückgewinnung müssen durch geeignete Maßnahmen alle periodischen Wiederholungen des Signalspektrums ($\mathbf{m} = 1, 2, 3, \ldots$) im Idealfall vollständig beseitigt werden.

In der Praxis lässt sich dagegen aus Kostengründen nur eine ausreichende Abschwächung realisieren.

Dafür eignet sich prinzipiell ein **TP – HP – BP – BS – AP – Filter** mit einer **Durchlass – Sperr – Grenzfrequenz** $\mathbf{f_g}$, die folgende Bedingung einhält: $\mathbf{f_g}$

Hier ist zu erkennen, dass die (maximale) Signalfrequenz die Bedingung $\mathbf{f_{ein} < 0.5 \cdot f_S}$ erfüllen muss, da andernfalls keine vollständige Signalrückgewinnung möglich ist.

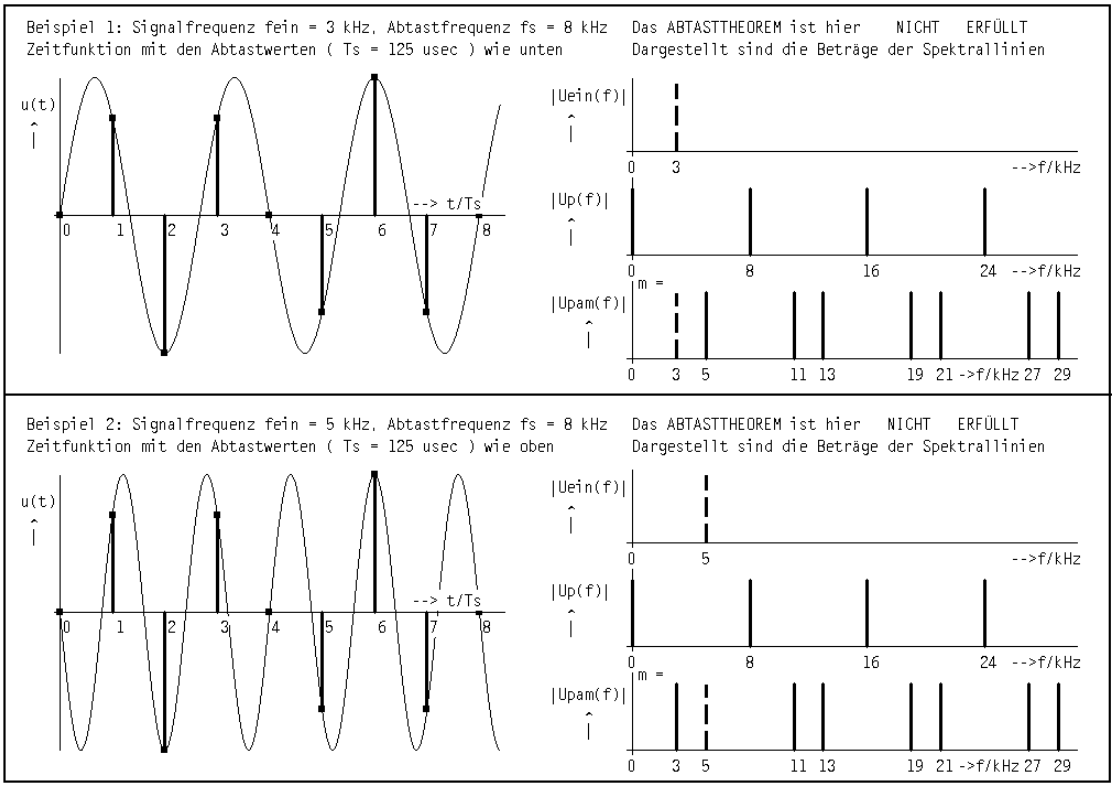
6.2.2 Das Abtasttheorem, Bandbegrenzung des abzutastenden Signals

Damit ein Signal mit einer Maximalfrequenz $\mathbf{f_{ein}}$ ohne Informationsverlust aus seinen Abtastwerten rekonstruiert werden kann, muss die Abtastung mit einer ausreichend hohen Frequenz $\mathbf{f_S}$ vorgenommen werden:

$$\mathbf{f_S > \ldots\ldots \cdot f_{ein}}$$

Diese für alle zeitdiskreten Verarbeitungen grundlegende Bedingung wird **ABTASTTHEOREM** genannt. Es wurde 1933 von KOTELNIKOF (also noch vor NYQUIST und SHANNON) formuliert.

Bei jedem sinusförmigen Signal müssen deshalb wenigstens ..... Abtastwerte pro Periode vorliegen.

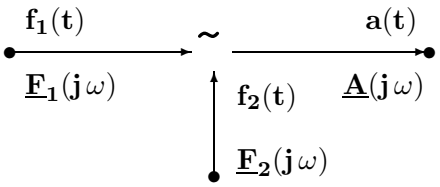


Das Bild zeigt zwei Zeitfunktionen mit den gleichen Abtastwerten und die zugehörigen Linienspektren. In welchen Beispiel ist das Abtasttheorem erfüllt? Erklären Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede der beiden Spektren und tragen Sie bei den PAM-Signalen die Werte von $\mathbf{m}$ ein.

Andere Herleitung der Abtastung: (Siehe dazu auch Seite 35)

Multiplikation im Zeitbereich $\Longleftrightarrow$ Faltung im Frequenzbereich

Bei wichtigen Anwendungen der Kommunikationstechnik werden zwei Signale $\mathbf{f_1(t)}$; $\mathbf{f_2(t)}$ im Zeitbereich miteinander multipliziert [z.B Abtastung kontinuierlicher Signale, Fensterfunktionen zur zeitlichen Begrenzung oder Bewertung einer Zeitfunktion]. In solchen Fällen kann die Spektraldichtefunktion für das Produktsignal $\mathbf{a(t) = f_1(t) \cdot f_2(t)}$ per Faltung aus den Spektren der beiden beteiligten Signale ermittelt werden.



Zeitbereich: $\mathbf{a(t) = f_1(t) \cdot f_2(t)}$ Multiplikation
Frequenzbereich: $\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{j\,\omega}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\pi}} \cdot [\,\underline{\mathbf{F}}_\mathbf{1}(\mathbf{j\,\omega}) * \underline{\mathbf{F}}_\mathbf{2}(\mathbf{j\,\omega})\,]$ Faltung

Zur Auswertung des Faltungsintegrals gibt es auch hier zwei gleichwertige Rechenvorschriften.

$$\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{j\,\omega}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\pi}} \cdot [\,\underline{\mathbf{F}}_\mathbf{1}(\mathbf{j\,\omega}) * \underline{\mathbf{F}}_\mathbf{2}(\mathbf{j\,\omega})\,] = \int_{\mathbf{v}=-\infty}^{\infty} \underline{\mathbf{F}}_\mathbf{1}(\mathbf{j\,v}) \cdot \underline{\mathbf{F}}_\mathbf{2}(\mathbf{j\,\omega - j\,v})\mathbf{dv} = \int_{\mathbf{v}=-\infty}^{\infty} \underline{\mathbf{F}}_\mathbf{2}(\mathbf{j\,v}) \cdot \underline{\mathbf{F}}_\mathbf{1}(\mathbf{j\,\omega - j\,v})\mathbf{dv}$$

Als Beispiel wird nun (wie auf Seite 89) die Abtastung der cosinusförmigen Spannung $\mathbf{u_{ein}(t)}$ mit dem idealisierten Spannungspuls $\mathbf{u_p(t)}$ mittels eines Analog-Multiplizierers betrachtet.

$\mathbf{f_1(t) = u_{ein}(t) = \hat{u}_{ein} \cdot \cos(2\,\pi\,f_{ein}\,t)}$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\mathbf{u_{ein}(t)}$ ist periodisch, reell und gerade.

$\mathbf{f_2(t) = u_p(t) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \underline{c}_\mu \cdot \cos(2\,\pi\,\mu\,f_S\,t)}$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\mathbf{u_p(t)}$ ist periodisch. reell und gerade.

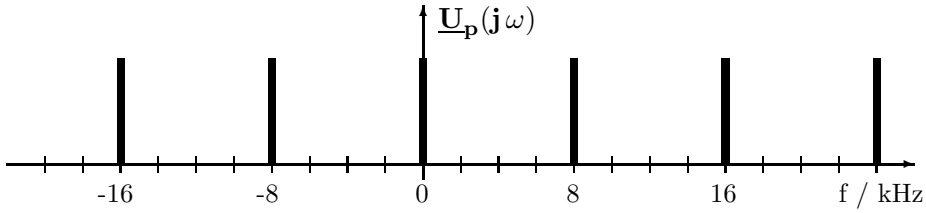
Mit $\mathbf{f_{ein} = 2\,kHz}$; $\mathbf{f_S = 8\,kHz}$ und $\mathbf{\cos(\omega\,t) = \frac{e^{j\,\omega\,t} + e^{-j\,\omega\,t}}{2}}$ erhält man die beiden unten dargestellten reellen zweiseitigen Linienspektren, die jeweils eine gerade Symmetrie aufweisen.

Faltet man beide Spektren, entstehen nur dort von Null verschiedene Beiträge, wo die Linien des umgeklappten Signals (Wegen der geraden Symmetrie beider Spektren verändert das 'Falten' hier nichts und kann entfallen!) mit denen des zweiten Signals zusammentreffen.

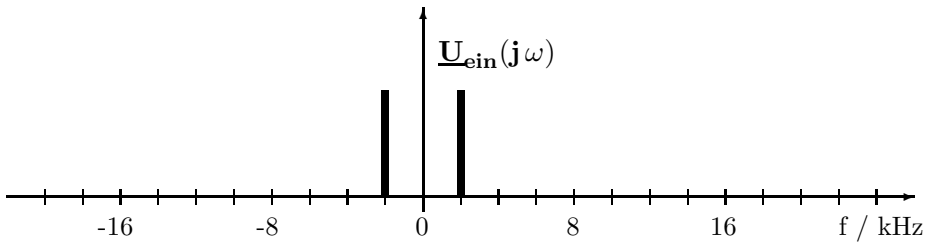
Das Spektrum des PAM-Signals $\mathbf{u_{pam}(t) = \frac{u_p(t) \cdot u_{ein}(t)}{1\,V}}$ besteht deshalb auch aus Linien.

Tragen Sie die Werte der Frequenzen im Bereich $\mathbf{-18\,kHz \le f \le 22\,kHz}$ in der Tabelle ein.

f / kHz											



. ⇓ Trennen Sie das untere Bild vorsichtig an der durchgezogenen Linie ab ⇓ .

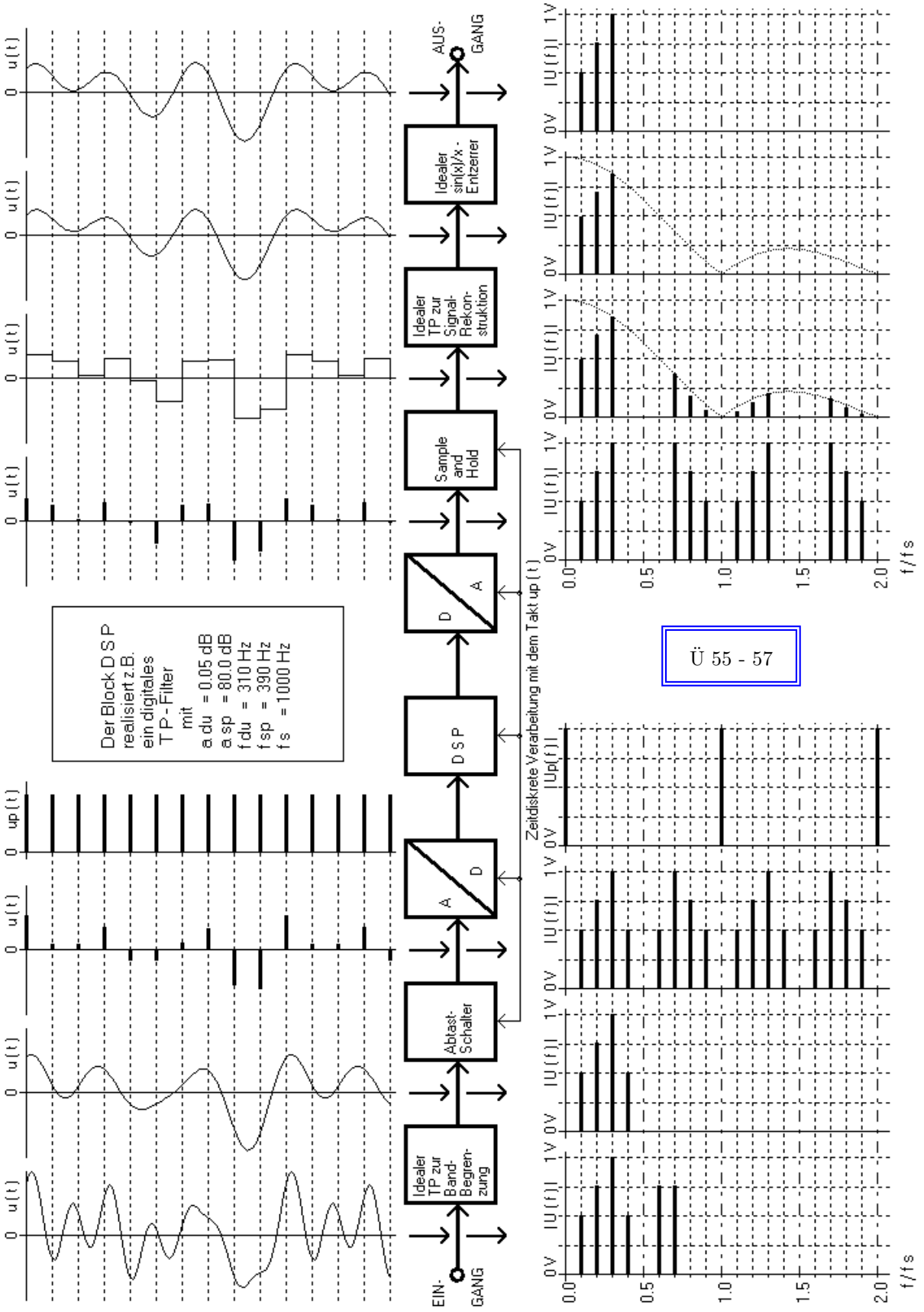


Spektrum des Signals $\mathbf{u_{ein}(t)}$ zum Beispiel auf Seite 89 Zu Seite 91

6.2.3 Beispiel eines idealisierten Systems zur digitalen Signalverarbeitung

Das Bild zeigt die Verarbeitungsblöcke, die Zeitverläufe sowie die zugehörigen Betragsspektren.

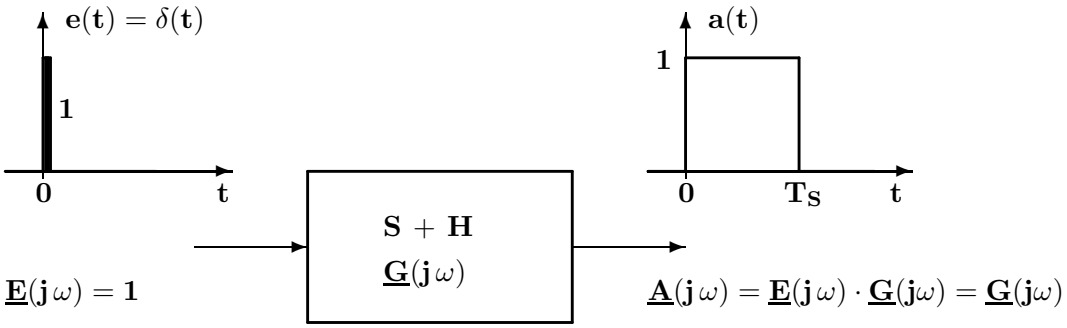
Im Block DSP (Digital Signal Processing) ist im dargestellten Beispiel ein digitales Tiefpass-Filter vorgesehen. Besonders zu beachten sind die peroidischen Wiederholungen in den Spektren der zeitdiskreten Signale.



6.2.4 Sample and Hold, sin(x)/x-Betragsentzerrer

Eine Abtast- und Halteschaltung (Sample and Hold, S+H) bewirkt eine Impulsverlängerung und erzeugt wie auf Seite 93 zu sehen aus einem zeitdiskreten, impulsförmigen Signal ein zeitkontinuierliches, treppenförmiges Signal mit einer Stufenbreite, die gleich der Abtastzeit $\mathbf{T_S}$ ist.

Es wird nun berechnet, welche Auswirkungen sich dadurch auf die Frequenzabhängigkeit der Verstärkung ergeben.



Aus $\mathbf{a(t)}$ folgt mit dem Fourier-Integral $\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{j}\,\omega) = \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{j}\omega) = \int_{\mathbf{t=0}}^{\mathbf{T_S}} \mathbf{1}\cdot\mathbf{e}^{-\mathbf{j}\,\omega\mathbf{t}}\mathbf{dt} = \frac{\mathbf{1}-\mathbf{e}^{-\mathbf{j}\,\omega\mathbf{T_S}}}{\mathbf{j}\,\omega}$

Für das Betragsquadrat dieser Spektraldichte- oder Verstärkungsfunktion berechnet man

$$|\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{j}\,\omega)|^{\mathbf{2}} = \frac{(\mathbf{1}-\mathbf{\cos}(\omega\mathbf{T_S}))^{\mathbf{2}}+\mathbf{\sin}^{\mathbf{2}}(\omega\mathbf{T_S})}{\omega^{\mathbf{2}}} = \frac{\mathbf{2}\cdot(\mathbf{1}-\mathbf{\cos}(\omega\mathbf{T_S}))}{\omega^{\mathbf{2}}}.$$

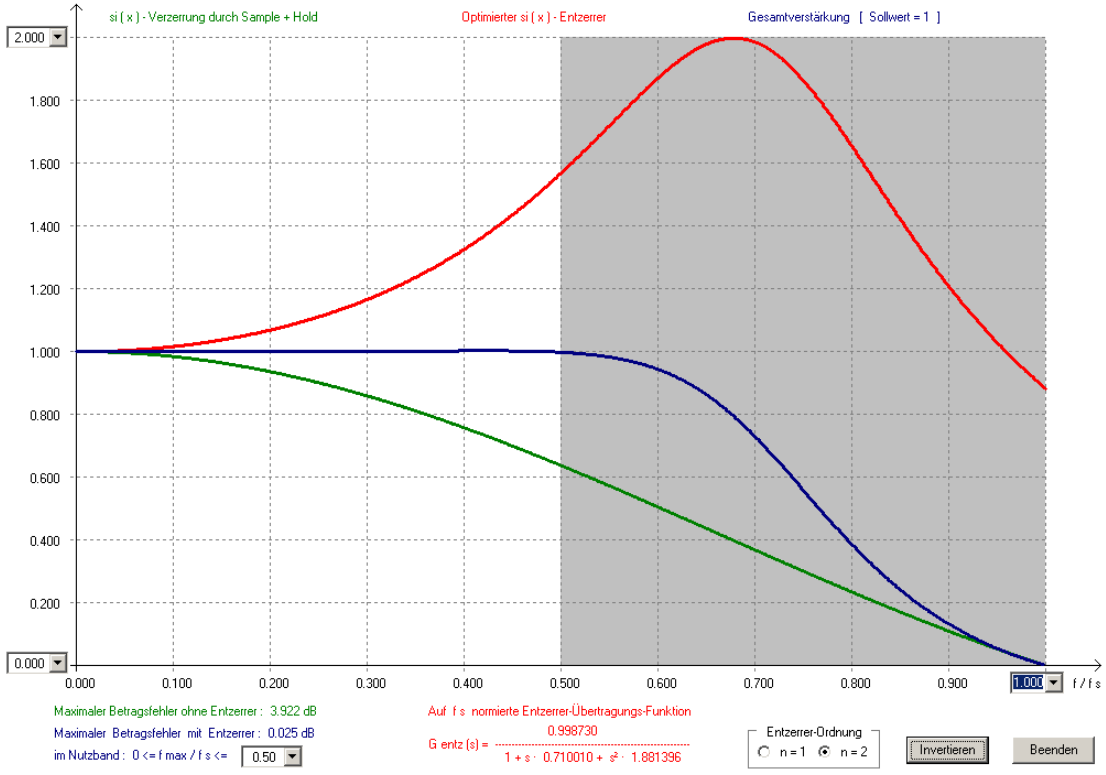
Mit $\mathbf{1}-\mathbf{\cos}(\omega\mathbf{T_S}) = \mathbf{2}\cdot\mathbf{\sin}^{\mathbf{2}}(\frac{\omega\mathbf{T_S}}{\mathbf{2}})$ folgt $\boxed{|\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{j}\,\omega)| = \mathbf{T_S}\cdot|\mathbf{si}(\frac{\omega\mathbf{T_S}}{\mathbf{2}})|.}$

Ü 58

Es bedeutet $\mathbf{si(x)} = \frac{\mathbf{\sin(x)}}{\mathbf{x}}$ ACHTUNG: $\mathbf{si(0)} = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}}\frac{\mathbf{\sin(x)}}{\mathbf{x}} = \mathbf{1}$

Die erste Nullstelle von $|\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{j}\,\omega)|$ tritt auf bei $\frac{\omega_\mathbf{0}\mathbf{T_S}}{\mathbf{2}} = \pi \quad\rightarrow\quad \mathbf{f_0} = \mathbf{f_S}$.

Bei $\mathbf{f} = \frac{\mathbf{f_S}}{\mathbf{2}} = \mathbf{f_{max}}$ gilt $\mathbf{si}(\frac{\mathbf{2\pi f T_S}}{\mathbf{2}}) = \mathbf{si}(\frac{\pi}{\mathbf{2}}) = \frac{\mathbf{2}}{\pi} = \mathbf{0.63662} \mathrel{\hat{=}} \mathbf{-3.9224\,dB}$



Das Bild zeigt unten den Frequenzgang des S+H-Gliedes, oben den Frequenzgang des Entzerrers und in der Mitte das Produkt beider Funktionen. Das Bild wurde mit dem Programm **SI_ENTZERR** erzeugt, das optimierte, normierte Entzerrerfunktionen vom Grad 1 und 2 berechnet.

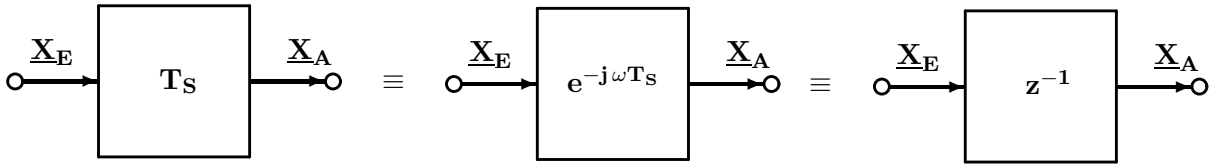
6.2.5 Verzögerungselement, Verzögerungsoperator

Das Verzögerungselement bewirkt, dass jeder Impuls am Eingang mit einer Zeitverzögerung von einem Abtastschritt $\mathbf{T_S = \frac{1}{f_S}}$, d. h. erst zum nächsten Abtastzeitpunkt am Ausgang zur Verfügung steht. In der Regelungstechnik wird eine solche Verzögerung 'Totzeit' genannt.

Der Verzögerungsoperator $\mathbf{z^{-1}}$ beschreibt dieses Verhalten in abgekürzter Form.

Mit dem Programm **TOTZEIT** kann die Wirkung von Verzögerungen bei zeitkontinuierlichen und zeitdiskreten Signalen betrachtet werden.

Folgende symbolische Darstellungen für Verzögerungselemente sind üblich:



Die zugehörige transzendente Übertragungs-Funktion ermittelt man mit der Fourier-Transformation

(Zeitverschiebung, siehe Seite 35). $\boxed{\mathbf{\underline{G}(j\,\omega) = \frac{\underline{X}_A(j\,\omega)}{\underline{X}_E(j\,\omega)} = e^{-j\,\omega T_S} \widehat{=} z^{-1}.}}$

Die Untersuchung des Verhaltens eines Verzögerungselementes im eingeschwungenen Zustand bei sinusförmigen Signalen führt zu den folgenden Ergebnissen:

$$\mathbf{\underline{G}(j\,\omega) = e^{-j\,\omega T_S} = \cos(-\omega T_S) + j\,\sin(-\omega T_S) = \cos(\omega T_S) - j\,\sin(\omega T_S) = |\underline{G}(j\,\omega)| \cdot e^{j\,\varphi(j\,\omega)}}$$

Betrag: $\mathbf{|\underline{G}(j\,\omega)| = \sqrt{Re\{\underline{G}(j\,\omega)\}^2 + Im\{\underline{G}(j\,\omega)\}^2} = \sqrt{\cos^2(\omega T_S) + \sin^2(\omega T_S)} = 1 = konstant}$

Winkel: $\mathbf{\varphi(j\,\omega) = \arctan\frac{Im\{\underline{G}(j\,\omega)\}}{Re\{\underline{G}(j\,\omega)\}} = \arctan\frac{-\sin(\omega T_S)}{\cos(\omega T_S)} = -\omega T_S}$

Für das Verständnis der Verzögerungswirkung ist auch die Berechnung der Gruppenlaufzeit τ_{gr} hilfreich, die die Frequenzabhängigkeit der Signalverzögerung beschreibt:

Ü 59

$$\mathbf{\tau_{gr} = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = T_S = konstant}$$

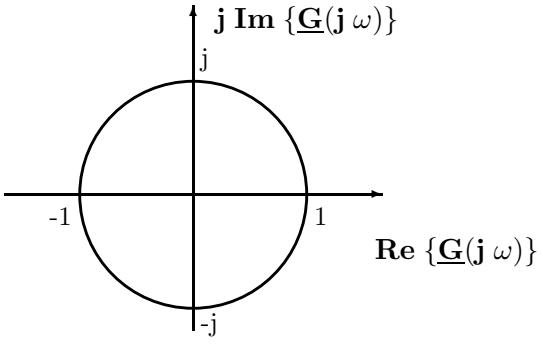
Das bedeutet, dass alle Frequenzanteile beim Durchlaufen dieses Elements um die Zeit $\mathbf{T_S}$ verzögert, in der Amplitude jedoch nicht verändert werden und deshalb die Amplituden und die Kurvenformen von $\mathbf{x_E(t)}$ und $\mathbf{x_A(t)}$ immer gleich sind.

Die Wirkung des Verzögerungselementes entspricht der eines 'Phasenschiebers',
dessen Phasenwinkel proportional mit der Frequenz abnimmt.

Bei einer Verzögerungszeit von einem Abtastschritt $\mathbf{T_S = \frac{1}{f_S}}$ gilt für die Phasenverschiebung

$$\mathbf{\varphi(j\,\omega) = -\omega \cdot T_S = -\frac{\omega}{f_S} = -\frac{2\pi f}{f_S} = -2\pi\frac{f}{f_S} = -2\pi \cdot x = -360° \cdot x\,, \qquad x = \frac{f}{f_S}.}$$

Die Ortskurve der komplexen Verstärkung $\mathbf{\underline{G}(j\,\omega)}$
beginnt für x=0 bei 1 + j0. Der Einheitskreis wird dabei
mit wachsendem ω im Uhrzeigersinn durchlaufen.



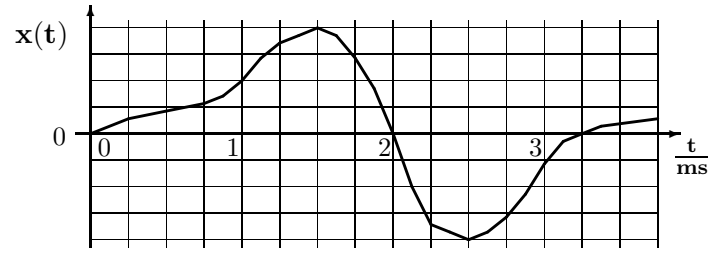
$\mathbf{x = f / f_S}$	$\varphi(x)$ / °
0.00	0
0.25	-90
0.50	-180
0.75	-270
1.00	-360 = 0
1.50	-540 = -180
2.00	-720 = 0

Der Winkel $\varphi(x)$ gegen die reelle Achse
wiederholt sich periodisch mit $\Delta x = 1$

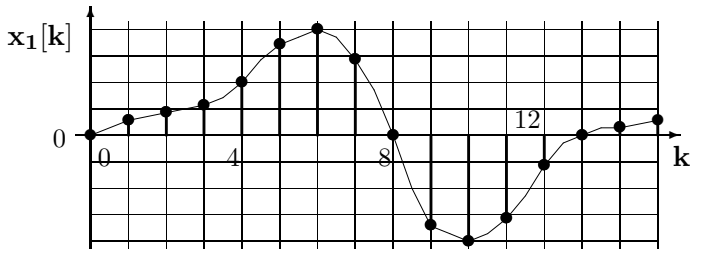
6.3 Darstellung zeitdiskreter Signale

Wie auf Seite 87 dargestellt lässt sich durch Abtastung aus jedem kontinuierlichen Signal $\mathbf{x(t)}$ ein zeitdiskretes Signal $\mathbf{x[k]}$ erzeugen.

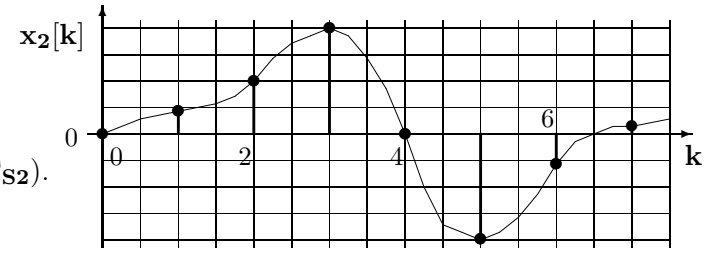
In diesem Bild ist das zeitkontinuierliche Signal $\mathbf{x(t)}$ vor der Abtastung dargestellt.



Bei einer Abtastung mit $\mathbf{f_{S1} = 4\ kHz}$
d.h. mit $\mathbf{T_{S1} = \frac{1}{f_{S1}} = 0.25\ ms}$
entsteht die Folge $\mathbf{x_1[k] = x(t = k \cdot T_{S1})}$.



Bei einer Abtastung mit $\mathbf{f_{S2} = 2\ kHz}$
d.h. mit $\mathbf{T_{S2} = \frac{1}{f_{S2}} = 0.5\ ms}$
entsteht die neue Folge $\mathbf{x_2[k] = x(t = k \cdot T_{S2})}$.



Am Beispiel einer Folge, die bei k=0 einsetzt und zeitproportional anwächst (Einheits-Rampenfolge) $\mathbf{x[k] = k \cdot \sigma[k]}$ soll die übliche Schreibweise für zeitdiskrete Signale dargestellt werden, wenn deren einzelne Werte anzugeben sind.

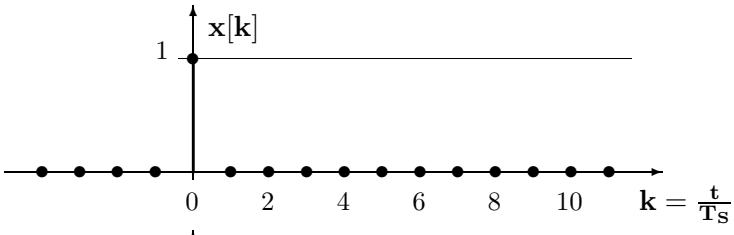
$\mathbf{x[0] = 0;\ x[1] = 1;\ x[2] = 2;\ x[3] = 3;\ x[4] = 4;\ x[5] = 5;\ x[6] = 6;\ x[7] = 7;\ x[8] = 8;\ \ldots}$

6.3.1 Wichtige, elementare zeitdiskrete Signale $\mathbf{x[k]}$

In allen folgenden Bildern repräsentieren die Höhen der Stützwerte die Momentanwerte des zeitdiskreten Signals an den Abtastzeitpunkten. Mathematisch lassen sich die Abtastwerte wie (Dirac-) Impulse mit einem entsprechenden Wert des Impulsintegrals deuten.

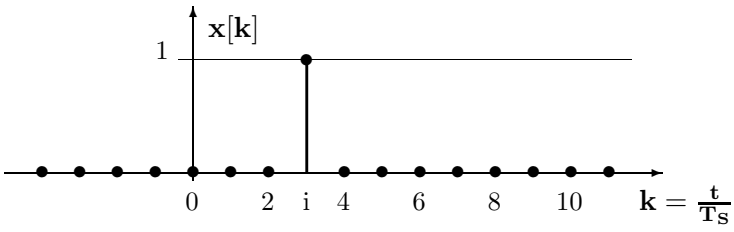
1. Einheits-Impuls zum Zeitpunkt $\mathbf{k = 0}$

$$\delta[k] = \begin{cases} 1 & : \quad k = 0 \\ 0 & : \quad k \neq 0 \end{cases}$$



2. Zeitverschobener Einheits-Impuls

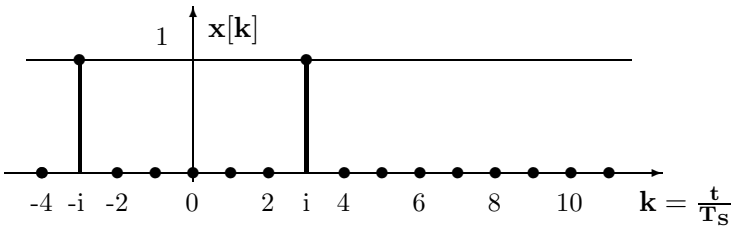
$$\delta[k - i] = \begin{cases} 1 & : \quad k = i \\ 0 & : \quad k \neq i \end{cases}$$



Ein zeitverschobenes Ereignis [hier der Einheits-Impuls δ] tritt bei dem Wert von k [hier bei k = i] auf, bei dem der Ausdruck in der eckigen Klammer zu Null wird.

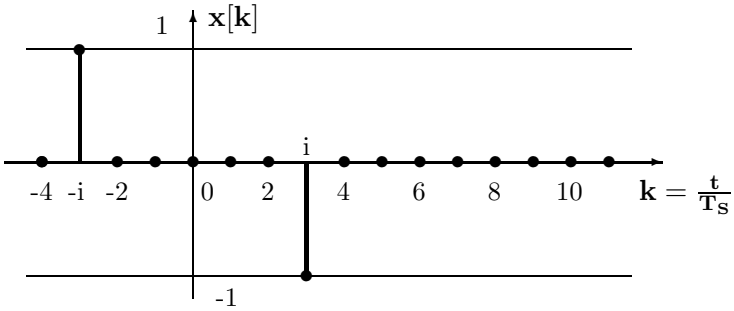
3. Gerader Einheits-Doppelimpuls

$$x[k] = \delta[k+i] + \delta[k-i]$$



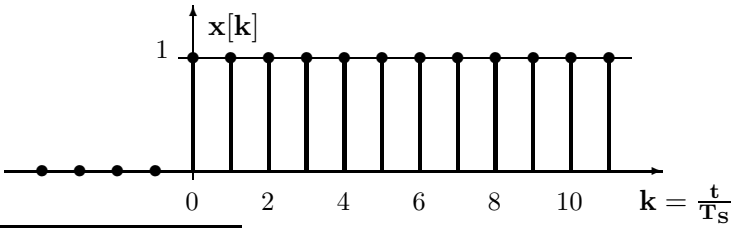
4. Ungerader Einheits-Doppelimpuls

$$x[k] = \delta[k+i] - \delta[k-i]$$



5. Einheits-Sprungfolge, Beginn bei $\mathbf{k = 0}$

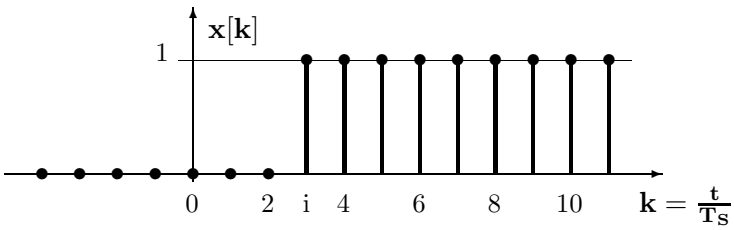
$$\sigma[k] = \begin{cases} 1 & : \quad k \geq 0 \\ 0 & : \quad k < 0 \end{cases}$$



ACHTUNG: Die Folge nimmt bereits bei k=0 den Wert 1 an!

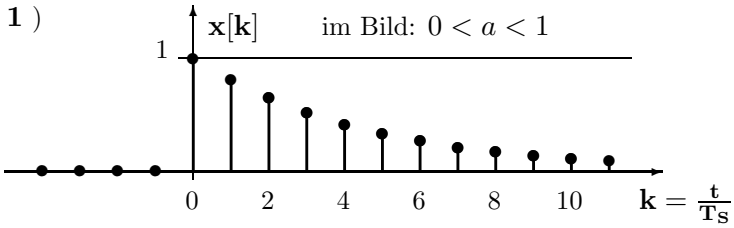
6. Zeitverschobene Einheits-Sprungfolge

$$\sigma[k-i] = \begin{cases} 1 & : \quad k \geq i \\ 0 & : \quad k < i \end{cases}$$



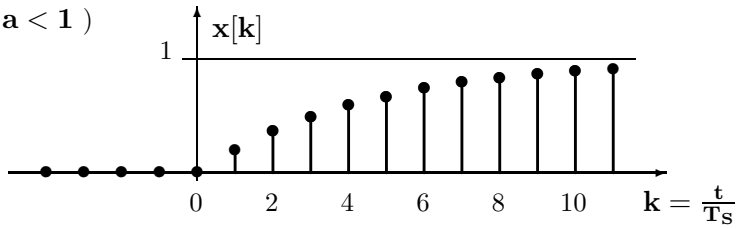
7. Abfallende reelle Exponentialfolge ($|\mathbf{a}| < \mathbf{1}$)

$$x[k] = \begin{cases} a^k & : \quad k \geq 0 \\ 0 & : \quad k < 0 \end{cases}$$



8. Ansteigende reelle Exponentialfolge ($\mathbf{0 < a < 1}$)

$$x[k] = \begin{cases} 1 - a^k & : \quad k \geq 0 \\ 0 & : \quad k < 0 \end{cases}$$



9. Komplexe Exponentialfolge (Frequenz $\mathbf{f_0}$)

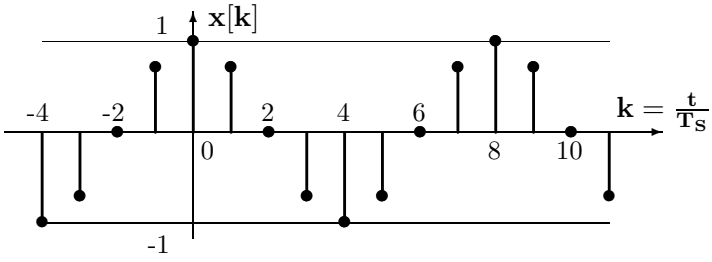
$$\underline{x} = e^{j\,2\pi\,f_0 \cdot k\,T_S} = cos(2\pi\,f_0 \cdot k\,T_S) + \; j\; sin(2\pi\,f_0 \cdot k\,T_S) = Re\{\underline{x}\} + \; j\; Im\{\underline{x}\}$$

$$\underline{x} = e^{j\,k \cdot 2\pi\,f_0/f_S} = cos(k \cdot 2\pi\,f_0/f_S) + \; j\; sin(k \cdot 2\pi\,f_0/f_S)$$

Aus Real- bzw. Imaginärteil dieser Folge erhält man die Cosinus- bzw. die Sinusfolge und durch eine gewichtete Summe von beiden eine allgemeine Sinusfolge mit Phasenverschiebung.

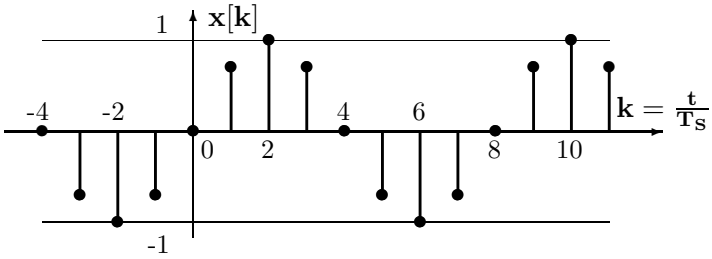
9a. Cosinusfolge (Frequenz $\mathbf{f_0}$)

$$x[k] = Re\{\underline{x}\} = cos(k \cdot 2\pi\, f_0/f_S)$$



9b. Sinusfolge (Frequenz $\mathbf{f_0}$)

$$x[k] = Im\{\underline{x}\} = sin(k \cdot 2\pi\, f_0/f_S)$$

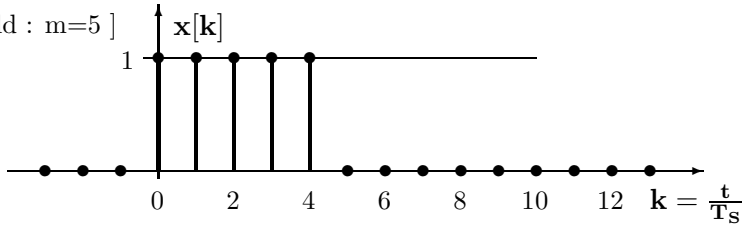


Diese Folgen verlaufen nur dann periodisch mit der Grundfrequenz $\mathbf{f_0}$, wenn das Verhältnis $\mathbf{n = \frac{f_S}{f_0}}$ ganzzahlig (wie oben in den Bildern für $\mathbf{n = 8}$ dargestellt) ist.

In allen anderen Fällen findet keine identische Wiederholung der Abtastwerte nach einer Periodendauer der Schwingung statt.

10. Folge von m Einheitsimpulsen [im Bild : m=5]

$$\mathbf{x[k]} = \begin{cases} 0 & : \quad k < 0 \\ 1 & : \quad 0 \le k \le m-1 \\ 0 & : \quad k \ge m \end{cases}$$



Alle Signale, die für negative Zeiten, d.h. für $\mathbf{k < 0}$ gleich Null sind, nennt man kausale Signale. Bei ihnen gilt : $\mathbf{x[k] = 0}$ für $\mathbf{k < 0}$.

6.3.2 Berechnung der Spektraldichtefunktionen ausgewählter Signale

Bei der Berechnung der Spektren werden die folgenden wichtigen Eigenschaften und Ergebnisse der Fourier-Transformation sowie zwei mathematische Äquivalenzen benötigt (siehe Seiten 34 mit 36).

- Linearität: Der Überlagerungssatz ist im Zeit- und Frequenzbereich anwendbar:

  $$\mathbf{f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t)} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{\underline{F}(j\,\omega) = \underline{F}_1(j\,\omega) + \underline{F}_2(j\,\omega) + \underline{F}_3(j\,\omega)}$$

- Verschiebung der Zeitfunktion [Verzögerung] um m Abtatsschritte:

  $$\mathbf{f(t - m \cdot T_S) = f[k - m]} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{\underline{F}(j\,\omega) \cdot e^{-j\,m\,\omega T_S}}$$

- Der Einheitsimpuls und seine Bildfunktion:

  $$\mathbf{f(t) = \delta[k]} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{\underline{F}(j\,\omega) = 1}$$

Ü 60 - Ü 63

Es gilt für jedes Argument $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{j\,2}} \; ; \quad \mathbf{j\,2\,sin(x) = e^{jx} - e^{-jx}}$$

$$\mathbf{cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}} \; ; \quad \mathbf{2\,cos(x) = e^{jx} + e^{-jx}}$$

Deutet man eine vorliegende Zahlenfolge als die Einheits-Impulsantwort eines zeitdiskreten Systems, beschreibt das (i.A. komplexe) Spektrum zugleich die (i.A. komplexe) Verstärkung dieses Systems. Vertiefen Sie Ihr Verständnis mit dem Programm **IMPULSE** .

6.3.3 Fensterfunktionen, Programm **FENSTER**

Eine Fensterfunktion, die [wegen window ≙ Fenster] mit $\mathbf{w[k]}$ bezeichnet wird, dient dazu,

1. eine Impulsfolge $\mathbf{x[k]}$ auf die Länge $\mathbf{0 \le t \le (N-1) \cdot T_S}$ zeitlich zu begrenzen und
2. dabei auch noch -falls dies erforderlich ist- eine Bewertung der Impulsfolge durchzuführen.

Die neue 'gefensterte' Folge $\mathbf{y[k] = x[k] \cdot w[k]}$ erhält man durch punktweise Produktbildung der Werte der Impulsfolge $\mathbf{x[k]}$ mit den Werten der Fensterfunktion $\mathbf{w[k]}$, deren N Stützwerte wie folgt definiert sind:

$$\mathbf{w[k]} = \begin{cases} 0 & : \quad k < 0 \\ \ge 0 \ldots \le 1 & : \quad 0 \le k \le N-1 \\ 0 & : \quad k \ge N \end{cases}$$

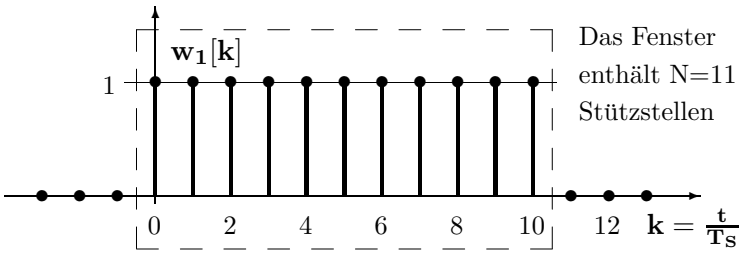
Vor dem Einsetzen der Fensterfunktion: Wert 0
Im Fenster gilt: $0 \le$ Wert ≤ 1
Nach dem Auslaufen der Fensterfunktion: Wert 0

Die Stützwerte der Fensterfunktion wirken dabei als Faktoren zur Bewertung und führen mit ihren Werten Null außerhalb des Fensters dazu, dass die Impulsfolge dort ausgeblendet wird.

Bei der Multiplikation einer Folge mit einer Fensterfunktion können die Beträge der Folgenwerte zwar verkleinert aber wegen $\mathbf{max\{w[k]\} \le 1}$ prinzipiell nicht verstärkt werden.
Wegen $\mathbf{0 \le w[k] \le 1}$ verändert die Fensterfunktion die Vorzeichen der Stützwerte nicht.

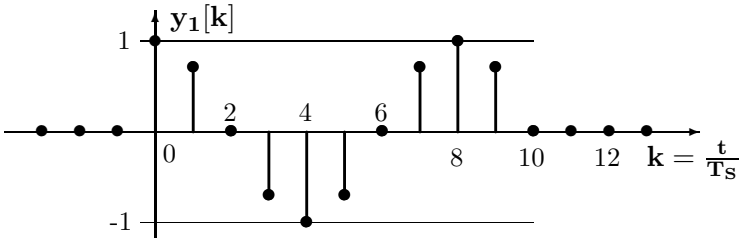
Abhängig vom Verlauf $\mathbf{w[k]}$ lässt sich neben dem 'harten' Ein- und Ausblenden durch ein Rechteckfenster (dargestellt ist die Fensterfunktion für N=11 und ihre Auswirkung auf die Cosinusfolge von Seite 98)

$$\mathbf{w_1[k]} = \begin{cases} 0 & : \quad k < 0 \\ 1 & : \quad 0 \le k \le N-1 \\ 0 & : \quad k \ge N \end{cases}$$



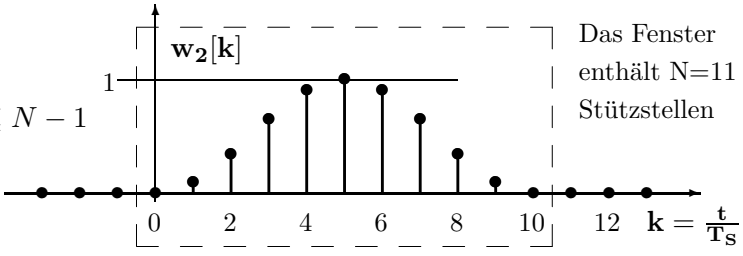
Das Fenster enthält N=11 Stützstellen

$$\mathbf{y_1[k] = w_1[k] \cdot \cos(k \cdot 2\pi\, f_0/f_S)}$$



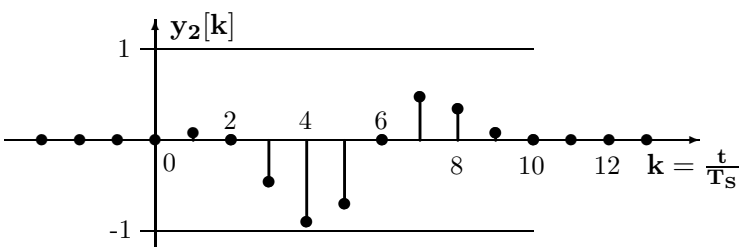
auch ein 'weicher' Übergang z.B. durch die 1-cos-Flanken des Hann-Fensters [wird auch 'Hanning'-Fenster genannt] erreichen. In den folgenden Bildern ist diese Fensterfunktion für N=11 und ihre Auswirkung auf die Cosinusfolge von Seite 95 dargestellt.

$$\mathbf{w_2[k]} = \begin{cases} 0 & : \quad k < 0 \\ 0.5 \cdot [\, 1 - cos\frac{2\pi k}{N-1} \,] & : \quad 0 \le k \le N-1 \\ 0 & : \quad k \ge N \end{cases}$$



Das Fenster enthält N=11 Stützstellen

$$\mathbf{y_2[k] = w_2[k] \cdot \cos(k \cdot 2\pi\, f_0/f_S)}$$



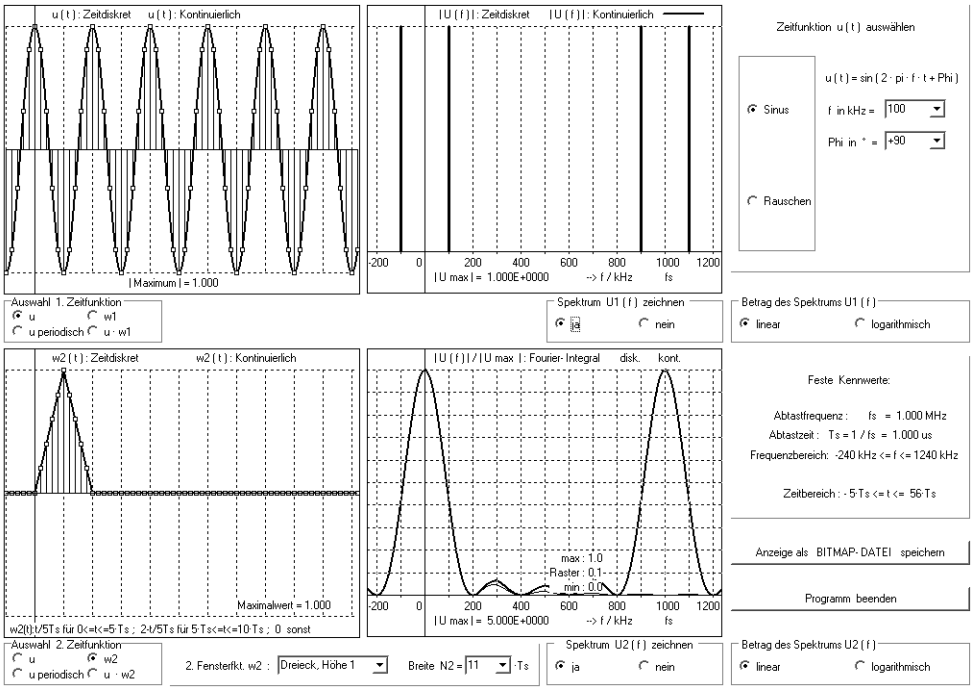
Ü 64

Für den praktischen Gebrauch gibt es eine Vielzahl weiterer Fensterfunktionen, die meist nach ihren Erfindern benannt sind und recht unterschiedliche Bewertungen durchführen.

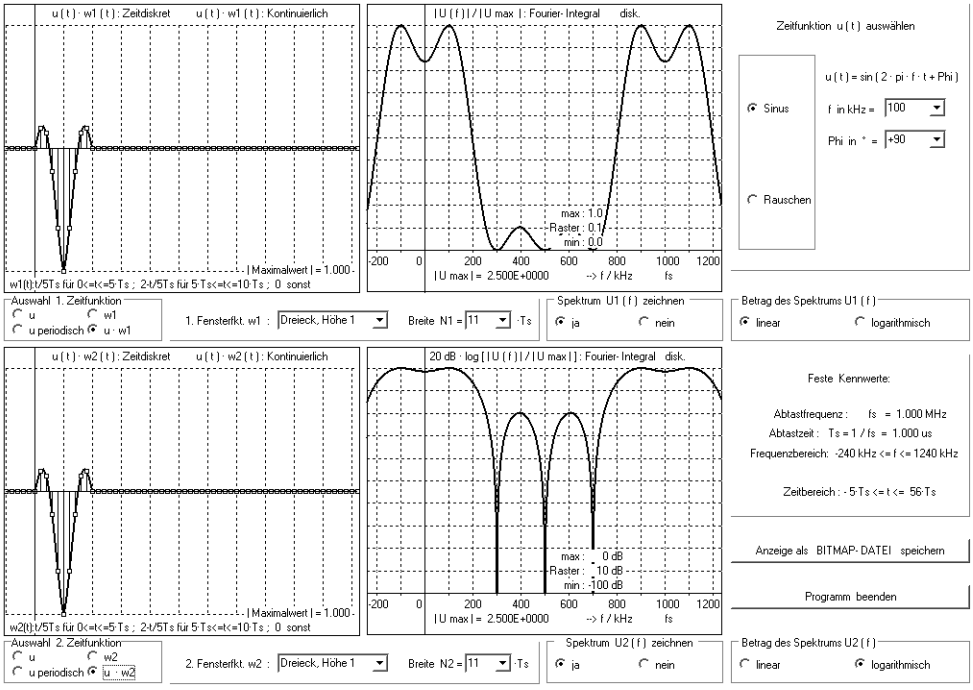
Durch die 'Fensterung' genannte Bewertung mit einer Fensterfunktion ergibt sich im Frequenzbereich eine tiefpassartige Filterwirkung, bei der Breite und Verlauf der Verstärkung im 'Durchlassbereich' und im 'Sperrbereich' in einer komplizierten, durch die Fourier-Transformation festgelegten Abhängigkeit von $\mathbf{w}[\mathbf{k}]$ stehen.

Als Folge der | Multiplikation von Signal- und Fensterfunktion im Zeitbereich | erhält man das Spektrum nach der 'Fensterung' durch die | Faltung der Spektren von Signal und Fenster | (siehe auch Seite 35 und Seite 91). Vertiefen Sie Ihr Verständnis mit dem Programm **FENSTER**.

Dreieckfenster und cosinusförmiges Signal der Frequenz 100 kHz [$f_S = 1$ MHz]



Cosinusförmiges Signal (wie oben) mit Dreieckfenster multipliziert



6.4 Systematische Ermittlung der Spektralfunktionen zeitdiskreter Signale

Die Methoden zur Umrechnung des Zeitverhaltens in den Frequenzbereich unterscheiden sich bei zeitdiskreten Signalen in einigen wichtigen Punkten von denen bei zeitkontinuierlichen Signalen.

6.4.1 Die Diskrete Fourier-Transformation (DFT)

Bei kontinuierlichen Signalen stellt die Fourier-Transformation den Zusammenhang zwischen der Zeitfunktion $\mathbf{u(t)}$ und der Spektraldichtefunktion $\mathbf{\underline{U}(j\,\omega)}$ her.
Die Gln. (1) und (2) wurden auf Seite 34 zur Hin- und Rücktransformation eingeführt.

$$\mathbf{\underline{U}(j\,\omega) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-j\omega t}\,dt} \quad (1) \qquad\qquad \mathbf{u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} \underline{U}(j\,\omega) e^{j\omega t}\,d\omega} \quad (2)$$

Zum Übergang auf abgetastete, zeitdiskrete Signale ersetzt man in Gl. (1) die folgenden Terme

$$\mathbf{t \Rightarrow n \cdot T_S;\quad u(t) \Rightarrow u(n \cdot T_S);\quad e^{-j\,\omega t} \Rightarrow e^{-j\,\omega n \cdot T_S} = e^{-j\,n\,2\,\pi\,f/f_S}}\ ,$$

nähert das Integral durch eine Summe an und erstreckt die Summation aus praktischen Gründen (Rechenzeit, Speicherplatzbedarf) nur über die endliche Anzahl von $\mathbf{N}$ Stützstellen.

Die so gefundene Gleichung wiederholt sich (wegen der Abtastung mit $\mathbf{f_S = \frac{1}{T_S}}$)

$$\mathbf{\underline{U}(j\,\omega) = \underline{U}(j\,2\,\pi\,f) = \sum_{n=0}^{N-1} u(nT_S) \cdot e^{-j\,n\,2\pi\,f/f_S}}$$

periodisch mit $\mathbf{f_S = \frac{1}{T_S}}$ und besitzt nur $\mathbf{N}$ linear unabhängige Funktionswerte bei den diskreten Frequenzen $\mathbf{f = k \cdot \frac{f_S}{N}}$; $\mathbf{k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1}$.

$$\mathbf{\underline{U}(f = k \cdot \tfrac{f_S}{N}) = \sum_{n=0}^{N-1} u(nT_S) \cdot e^{-j\,n\,2\pi \cdot k \frac{f_S}{N} \cdot \frac{1}{f_S}} = \sum_{n=0}^{N-1} u(nT_S) \cdot e^{-j\,\frac{2\pi \cdot n \cdot k}{N}}}.$$

Daraus erhält man durch Abkürzung das Gleichungssystem mit $\mathbf{N}$ Gleichungen für die DFT.

$$\mathbf{\underline{U}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} u[n] \cdot e^{-j\,\frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot n}} \quad ; \quad \mathbf{k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1} \quad (\text{Frequenzindex})$$

Die Umkehrung der DFT wird Inverse DFT (IDFT) genannt und auch dieses Gleichungssystem besteht aus $\mathbf{N}$ Gleichungen.

$$\mathbf{u[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \underline{U}[k] \cdot e^{j\,\frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot n}} \quad ; \quad \mathbf{n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1} \quad (\text{Zeitindex})$$

Die Rechenvorschriften für die DFT und die IDFT lassen sich mit Hilfe des komplexen Drehfaktors (im Englischen als twiddle factor bezeichnet)

Ü 75

$$\mathbf{\underline{W}_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} = \cos(\tfrac{2\pi}{N}) - j\,\sin(\tfrac{2\pi}{N})} \qquad \text{wie folgt umschreiben}$$

$$\mathbf{\underline{U}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} u[n] \cdot \underline{W}_N^{k \cdot n}} \quad ; \quad \mathbf{k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1} \quad (\text{Frequenzindex})$$

$$\mathbf{u[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \underline{U}[k] \cdot \underline{W}_N^{-k \cdot n}} \quad ; \quad \mathbf{n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1} \quad (\text{Zeitindex}).$$

Stellt man die Wertefolge im Zeit- bzw. Frequenzbereich $\mathbf{u[n]}$ bzw. $\mathbf{\underline{U}[k]}$ als reellen bzw. komplexen Spaltenvektor $\mathbf{u_N}$ bzw. $\mathbf{\underline{U}_N}$ dar und fasst alle benötigten Drehfaktoren in der komplexen Matrix $\mathbf{\widetilde{\underline{W}}_N}$ zusammen, kann sowohl die DFT als auch die IDFT sehr übersichtlich dargestellt werden.

Mit Hilfe der Vektoren und der Matrix

$$\mathbf{u_N} = \begin{bmatrix} \mathbf{u[0]} \\ \mathbf{u[1]} \\ \mathbf{u[2]} \\ \vdots \\ \mathbf{u[N-1]} \end{bmatrix}, \quad \underline{\mathbf{U}}_\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{U}}\mathbf{[0]} \\ \underline{\mathbf{U}}\mathbf{[1]} \\ \underline{\mathbf{U}}\mathbf{[2]} \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{U}}\mathbf{[N-1]} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\underline{\mathbf{W}}}_\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \dots & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \underline{\mathbf{W}}_\mathbf{N}^{\mathbf{1}} & \underline{\mathbf{W}}_\mathbf{N}^{\mathbf{2}} & \dots & \underline{\mathbf{W}}_\mathbf{N}^{\mathbf{N-1}} \\ \mathbf{1} & \underline{\mathbf{W}}_\mathbf{N}^{\mathbf{2}} & \underline{\mathbf{W}}_\mathbf{N}^{\mathbf{4}} & \dots & \underline{\mathbf{W}}_\mathbf{N}^{\mathbf{(N-1)2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{1} & \underline{\mathbf{W}}_\mathbf{N}^{\mathbf{N-1}} & \underline{\mathbf{W}}_\mathbf{N}^{\mathbf{(N-1)2}} & \dots & \underline{\mathbf{W}}_\mathbf{N}^{\mathbf{(N-1)(N-1)}} \end{bmatrix}$$

erhält man für die DFT in Matrixform $\quad \underline{\mathbf{U}}_\mathbf{N} = \widetilde{\underline{\mathbf{W}}}_\mathbf{N} \cdot \mathbf{u_N}$

und kann auch die IDFT in Matrixform angeben $\quad \mathbf{u_N} = \widetilde{\underline{\mathbf{W}}}_\mathbf{N}^{-\mathbf{1}} \cdot \underline{\mathbf{U}}_\mathbf{N}$.

Die zur IDFT benötigte inverse Matrix $\widetilde{\underline{\mathbf{W}}}_\mathbf{N}^{-\mathbf{1}}$ ist konjugiert komplex zur Matrix $\widetilde{\underline{\mathbf{W}}}_\mathbf{N}$ und unterscheidet sich von ihr auch durch den zusätzlichen Faktor 1/N: $\quad \widetilde{\underline{\mathbf{W}}}_\mathbf{N}^{-\mathbf{1}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{N}} \cdot \widetilde{\underline{\mathbf{W}}}_\mathbf{N}^{*}$

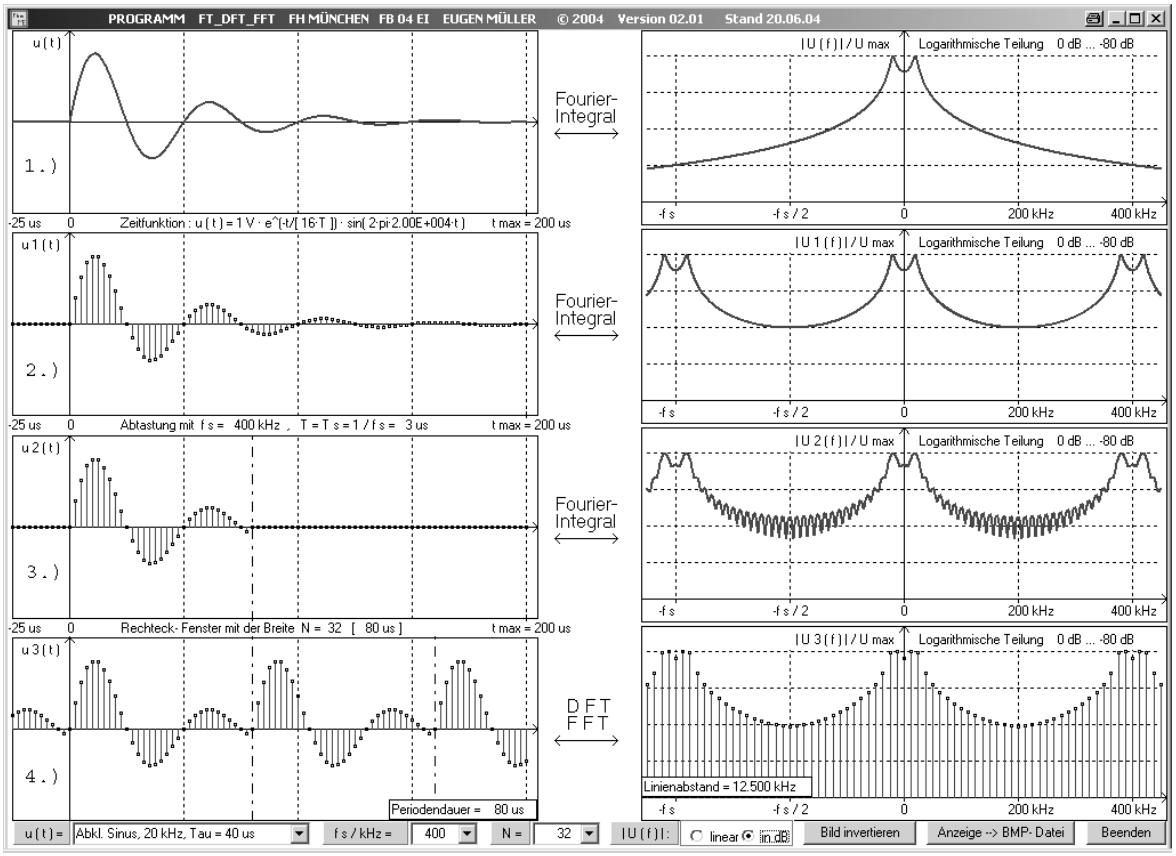
Ein Ausdruck des Programms **FT_DFT_FFT** zeigt die Entstehung der DFT eines gedämpft abklingenden Sinussignals in vier Schritten.

1.) Das kontinuierliche Signal $\mathbf{u(t)}$ und seine Fourier-Transformierte $|\underline{\mathbf{U}}(\mathbf{f})|$.

2.) Das abgetastete Signal $\mathbf{u(n \cdot T_S)}$ und seine periodische Fourier-Transformierte $|\underline{\mathbf{U}}_\mathbf{1}(\mathbf{f})|$.
Die Überlappung im Spektrum bei der halben Abtastfrequenz ist deutlich zu erkennen.

3.) Das durch ein Rechteckfenster auf $\mathbf{N \cdot T_S}$ zeitbegrenzte Signal $\mathbf{u(nT_S)}$
und seine periodische Fourier-Transformierte $|\underline{\mathbf{U}}_\mathbf{2}(\mathbf{f})|$.

4.) Die auf $\mathbf{N \cdot T_S}$ zeitbegrenzte, mit $\mathbf{T = N \cdot T_S}$ periodische Folge $\mathbf{u[n] = u_3(t)}$
mit $\mathbf{N}$ Stützstellen und ihre mit $\mathbf{f_S}$ periodische DFT $|\underline{\mathbf{U}}\mathbf{[k]}| = |\underline{\mathbf{U}}_\mathbf{3}(\mathbf{f})|$
mit $\mathbf{N}$ unabhängigen Spektrallinien.



Es soll hier nur angemerkt werden, dass die DFT und auch die IDFT nicht nur auf reelle sondern auch auf komplexe Zeitfunktionen angewendet werden kann, wobei in diesem Fall sowohl die beiden Spaltenvektoren als auch die Matrix komplexwertig sind und auch alle Rechenschritte komplex durchgeführt werden müssen.

Die Berechnung der DFT und der IDFT unterscheidet sich nur geringfügig voneinander, so dass es ausreichend ist, eine Prozedur für die DFT aufzustellen, in der für die IDFT die Vektoren zu tauschen und die Matrix $\underline{\widetilde{\mathbf{W}}}_{\mathbf{N}}$ zu modifizieren ist.

Bei der Durchführung der DFT oder der IDFT sind sehr viele (genau N^2 komplexe Einträge in der Matrix mit den Drehfaktoren) Sinus- und Cosinus-Ausdrücke zu berechnen. Wegen der zeitaufwändigen Funktionsaufrufe sind der direkten Berechnung bei großen N sehr bald praktische Grenzen gesetzt. Bei mehrfachem Aufruf von DFT und / oder IDFT bringt das Abspeichern der Matrix Vorteile.

6.4.2 Die Schnelle Fourier-Transformation (Fast Fourier Transform, FFT)

Für alle Echtzeit-Einsätze der Spektralberechnung verwendet man statt der DFT die Schnelle Fourier-Transformation (FFT), die auf der Basis der gleichen Daten und Gleichungen durch geschickte Umformungen und unter Ausnützung der Periodizität der Winkelfunktionen die erforderlichen Rechenzeiten drastisch reduziert.

Der Zeitgewinn wird für $\mathbf{N = 2^m}$ (m ganzzahlig, d.h. N = 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, ...) sehr groß. Noch schneller verläuft die Berechnung mit $\mathbf{N = 4^m}$ (d.h. N = 4, 16, 64, 256, 1024, 4096, 16384 ...). Nachteilig ist jedoch die grobe Abstufung der Stützstellenzahl.

Die Tabelle zeigt den bei $\mathbf{N = 2^m}$ und bei $\mathbf{N = 2^{12} = 4096}$ erforderlichen Rechenaufwand.

Weg	sinus	cosinus	MULT	ADD	sinus	cosinus	MULT	ADD
DFT	N^2	N^2	$2N^2$	$2(N^2-N)$	16 777 216	16 777 216	33 554 432	33 546 240
FFT	N-1	N-1	Nm	2Nm	4 095	4 095	49 152	98 304

Bei größeren Werten von N nimmt die Überlegenheit der FFT weiter zu.

Alle Besonderheiten der DFT (periodisches Spektrum durch Abtastung, Überlappung des Spektrums bei nicht bandbegrenzten Signalen, Zeitbegrenzung auf $\mathbf{N \cdot T_S}$, nur $\mathbf{N}$ Spektralkomponenten sind voneinander linear unabhängig) bleiben auch bei der FFT erhalten.

Beachten Sie bei Anwendung der DFT, der FFT oder ihrer Umkehrungen folgende Zusammenhänge:

Das der Rechnung zu Grunde liegende Zeitsignal besteht aus einer periodischen Folge von N Abtastwerten, für das sich die folgende 'Periodendauer' T ergibt.

$$\boxed{\mathbf{T = N \cdot T_S}}$$

Als Abstand der Spektrallinien ergibt sich in Analogie zu den Fourier-Reihen die 'Grundfrequenz'

$$\boxed{\mathbf{\Delta f = \frac{1}{T} = \frac{1}{N \cdot T_S} = \frac{f_S}{N}} \; .}$$

Wegen der Abtastung mit $\mathbf{f_S = \frac{1}{T_S}}$ wiederholt sich das Spektrum ab $\mathbf{f_S}$ identisch.

Deshalb sind auch nur Anteile bis zu einer Maximalfrequenz $\boxed{\mathbf{f_{max} = \frac{f_S}{2} - \Delta f}}$ eindeutig.

Der FFT-Algorithmus wird modifiziert auch für eine Anzahl weiterer Aufgabenstellungen verwendet:

- Ausführung der (periodischen bzw. zirkularen) Faltung zweier zeitdiskreter Signale.
- Ausführung der Korrelation zweier zeitdiskreter Signale.
- Multiplikation extrem genauer Zahlen (mit z. B. 10^6 Mantissenstellen)

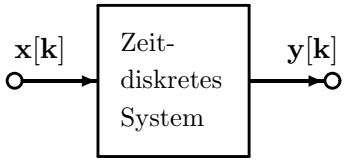
7 Beschreibung zeitdiskreter LTI-Systeme

In diesem Kapitel werden zunächst die grundlegenden Eigenschaften solcher Systeme betrachtet.

Es folgt deren Beschreibung durch Differenzengleichungen und Übertragungs-Funktionen, wobei die z-Transformation zur Anwendung kommt.

7.1 Grundlegende Eigenschaften zeitdiskreter Systeme

Zur näheren Charakterisierung und zur Klassifizierung können zeitdiskrete Systeme, die am Eingang mit der Folge $\mathbf{x[k]}$ erregt werden anhand ihrer Reaktion $\mathbf{y[k]}$ beurteilt werden.



7.1.1 Linearität

Bei linearen Systemen ist der Überlagerungssatz (das Superpositionsprinzip) anwendbar.
Besteht das Eingangssignal aus einer Linearkombination zweier Signale

$$\mathbf{x[k] = c_1 \cdot x_1[k] + c_2 \cdot x_2[k]} \; ; \qquad \mathbf{c_1, c_2} : \text{beliebig}$$

erhält man bei linearen Systemen das Ausgangssignal aus der zugehörigen Linearkombination

$$\mathbf{y[k] = c_1 \cdot y_1[k] + c_2 \cdot y_2[k]} \; ; \qquad \mathbf{c_1, c_2} : \text{wie oben}$$

der Signale $\mathbf{y_1[k]}$ und $\mathbf{y_2[k]}$, die die Reaktionen auf $\mathbf{x_1[k]}$ und $\mathbf{x_2[k]}$ darstellen.

In allen praktischen Systemen ist der Bereich für lineares Verhalten zu positiven und zu negativen Werten hin beschränkt. Es ist strikt darauf zu achten, dass alle (auch inneren) Signale in jedem Betriebszustand diesen zulässigen Bereich nicht verlassen, da andernfalls Verzerrungen auftreten, die unerwünschte Spektralanteile verursachen und das Verhalten des Systems stark verändern können.

7.1.2 Zeitinvarianz

Bei zeitinvarianten Systemen sind die Übertragungseigenschaften nicht von der Zeit abhängig.

Ein um i Abtastschritte verzögertes Eingangssignal $\mathbf{x[k-i]}$ (i beliebig) hat bei einem zeitinvarianten System ein ebenfalls um i Abtastschritte verzögertes Ausgangssignal $\mathbf{y[k-i]}$ zur Folge.

7.1.3 Stabilität

Stabil nennt man ein System, das auf ein sprungförmiges Eingangssignal $\mathbf{x[k]}$ endlicher Größe mit einem Ausgangssignal $\mathbf{y[k]}$ endlicher Größe antwortet, das für $\mathbf{k \to \infty}$ einen konstanten, endlichen Wert annimmt.

Kriterien zur systematischen Prüfung der Stabilität werden später bei der Behandlung der Übertragungs-Funktion betrachtet.

7.1.4 Kausalität

Ein System nennt man dann kausal, wenn seine Ausgangsreaktion nicht vor der sie verursachenden Erregung am Eingang auftritt.

Nur kausale Systeme sind technisch realisierbar und praktisch einsetzbar.

Eine systematische Prüfung auf Kausalität ist anhand der Einheits-Impulsantwort möglich und wird später behandelt.

Dieser Begriff wird (wie wir auf Seite 98 gesehen haben) auch auf Signale übertragen: Kausale Signale sind bei negativen Zeiten gleich Null. Dann gilt $\mathbf{x[k] = 0}$ für $\mathbf{k < 0}$.

Welche Möglichkeiten kennen Sie, um nichtkausale Folgen in kausale Folgen umzuwandeln?

7.2 Differenzengleichungen (DIFFGL) mit konstanten Koeffizienten

Die gleiche Bedeutung, die der Differenzialgleichung (DGL) bei zeitkontinuierlichen Systemen zukommt, hat bei zeitdiskreten Systemen die Differenzengleichung (DIFFGL).

Bei zeitkontinuierlichen Signalen können die Änderungen über der Zeit durch Differenzialquotienten

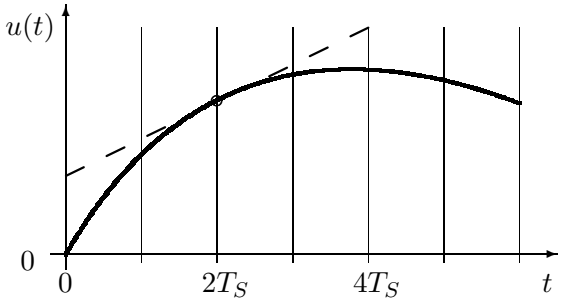
$$\boxed{\frac{\mathbf{du(t)}}{\mathbf{dt}} = \lim_{\mathbf{\Delta t \to 0}} \frac{\mathbf{u(t+\Delta t)-u(t)}}{\mathbf{\Delta t}}}$$

erfasst werden, da die Zeitfunktion $\mathbf{u(t)}$ zu jeder Zeit definiert ist und $\mathbf{\Delta t}$ hier infinitesimal klein gewählt werden kann.

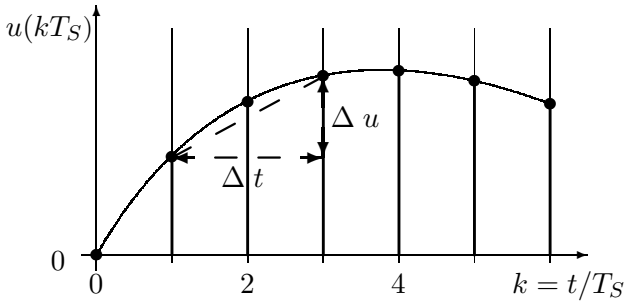
Zeitdiskrete Signale dagegen sind nur an den äquidistanten Abtastzeitpunkten $\mathbf{t = k \cdot T_S}$ definiert und ihre zeitlichen Änderungen lassen sich mit den verfügbaren Abtastwerten $\ldots,\ \mathbf{u[k-1]},\ \mathbf{u[k]},\ \mathbf{u[k+1]}, \ldots$ nur als Differenzenquotienten beschreiben.

$$\boxed{\frac{\mathbf{du}}{\mathbf{dt}}\Big|_{\mathbf{t=k\cdot T_S}} \approx \frac{\mathbf{u([k+1]T_S)-u([k-1]T_S)}}{\mathbf{2T_S}} = \frac{\mathbf{\Delta u}}{\mathbf{\Delta t}}}$$

Es gibt zahlreiche, weitere Möglichkeiten (z.B. Vorwärts- und Rückwärts-Differenzenquotient), um die zeitliche Ableitung einer zeitdiskreten Funktion durch Differenzenquotienten anzunähern.



Differenzialquotient für zeitkontinuierliches u(t).



Differenzenquotient für zeitdiskretes $u(kT_S)$.

Das dynamische Verhalten eines zeitdiskreten Systems wird deshalb durch eine DIFFGL beschrieben, die den Zusammenhang zwischen den zeitdiskreten Wertefolgen $\mathbf{x[k]}$ am Eingang und $\mathbf{y[k]}$ am Ausgang beschreibt.

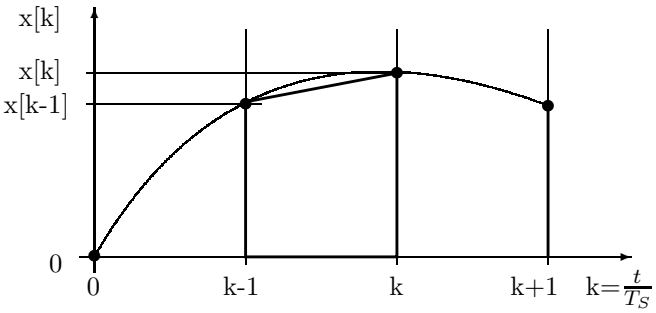
DIFFGL (z.B.): $\mathbf{y[k] + a_1 \cdot y[k-1] + a_2 \cdot y[k-2] = b_0 \cdot x[k] + b_1 \cdot x[k-1] + b_2 \cdot x[k-2]}$

Damit eine DIFFGL eindeutig gelöst werden kann, muss der Anfangszustand des Systems bekannt sein. Er wird bei kausalen Eingangssignalen durch die Anfangswerte (hier $\mathbf{y[-1]}$; $\mathbf{y[-2]}$) beschrieben, die zu berücksichtigen sind. Sind keine Anfangswerte vorgegeben oder zu ermitteln, werden diese mit dem Wert Null belegt.

Aus der DIFFGL lässt sich die zugehörige Übertragungs-Funktion ermitteln, die bei einer Auswertung für s=j ω Betrag und Winkel der Verstärkung des zeitdiskreten Systems im eingeschwungenen Zustand liefert.

Beispiele zum Aufstellen von Differenzengleichungen

1. Beispiel: Für ein (Teil-) System zur angenäherten Integration einer zeitdiskreten Wertefolge $\mathbf{x[k]}$ nach der Trapezregel ist die zugehörige DIFFGL aufzustellen.



Der Integralwert wächst im Schritt k um

$$\mathbf{\Delta y = y[k] - y[k-1] = \frac{x[k] + x[k-1]}{2} \cdot T_S}$$

$\mathbf{\Delta y}$ ..... Integralzuwachs im Schritt k

$\frac{\mathbf{x[k] + x[k-1]}}{\mathbf{2}}$ ..... Mittlere Trapezhöhe

$\mathbf{T_S}$ ..... Trapezbreite

Die DIFFGL zu diesem 'Integrator' folgt aus dem Zuwachs im Schritt k:

$$\boxed{\mathbf{y[k] - y[k-1] = \frac{x[k] + x[k-1]}{2} \cdot T_S}}$$

und man erkennt, dass hier neben dem aktuellen $\mathbf{x[k]}$ und dem um einen Abtastschritt zurückliegenden Eingangssignal $\mathbf{x[k-1]}$ auch die Vergangenheit des Ausgangssignals $\mathbf{y[k-1]}$ den aktuellen Wert $\mathbf{y[k]}$ am Ausgang beeinflusst (Anfangswert: $\mathbf{y[-1]}$).

2. Beispiel: Hier wird ein Block betrachtet, der zur Glättung von Signalen mit überlagertem Rauschen dient. Er soll durch Bildung des arithmetischen Mittelwertes aus drei benachbarten Stützwerten $\mathbf{x[k-2]}$, $\mathbf{x[k-1]}$, $\mathbf{x[k]}$ einen geglätteten Ersatzwert $\mathbf{y[k]}$ ermitteln, der zeitlich mit dem letzten Stützwert zusammenfällt. Die zugehörige DIFFGL lässt sich leicht ermitteln, da das Ausgangssignal (im Unterschied zum 1. Beispiel) nur von den Werten des Eingangssignals abhängt.

$$\boxed{\mathbf{y[k] = \frac{x[k-2] + x[k-1] + x[k]}{3}}}$$

Ü 65

7.3 z-Transformation, Übertragungs-Funktion

Mit dem Verzögerungsoperator lassen sich die Zeitverschiebungen in den DIFFGL erfassen und die Signale können vom Zeitbereich in den Bildbereich der z-Transformation übertragen werden.

Index k : aktueller Zeitpunkt, keine Verzögerung;
Index k-1 : gegenüber dem aktuellen Zeitpunkt eine Verzögerung um 1 Abtastschritt $\mathbf{\widehat{=} \; z^{-1}}$
Index k-2 : gegenüber dem aktuellen Zeitpunkt eine Verzögerung um 2 Abtastschritte $\mathbf{\widehat{=} \; z^{-2}}$
Index k-i : gegenüber dem aktuellen Zeitpunkt eine Verzögerung um i Abtastschritte $\mathbf{\widehat{=} \; z^{-i}}$

Aus der DIFFGL des 1. Beispiels $\mathbf{y[k] - y[k-1] = \frac{x[k] + x[k-1]}{2} \cdot T_S}$

erhält man im Bildbereich $\mathbf{\underline{Y} - \underline{Y} \cdot z^{-1} = \frac{\underline{X} + \underline{X} \cdot z^{-1}}{2} \cdot T_S \; ; \; \underline{Y} \cdot (1 - z^{-1}) = \underline{X} \cdot (1 + z^{-1}) \cdot \frac{T_S}{2}}$

und kann daraus die Übertragungs-Funktion als Verhältnis von Ausgangssignal zu Eingangssignal in zwei gleichwertigen Darstellungen als gebrochen rationale Funktion ermitteln.

$$\mathbf{\underline{G}(z^{-1}) = \frac{\underline{Y}(z^{-1})}{\underline{X}(z^{-1})} = \frac{T_S}{2} \cdot \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}} \quad \text{oder auch} \quad \mathbf{\underline{G}(z) = \frac{\underline{Y}(z)}{\underline{X}(z)} = \frac{T_S}{2} \cdot \frac{z + 1}{z - 1}}$$

Durch analoges Vorgehen findet man aus der DIFFGL des 2. Beispiels

$$\mathbf{y[k] = \frac{x[k-2] + x[k-1] + x[k]}{3}} \rightarrow \mathbf{\underline{Y} = \frac{\underline{X} \cdot z^{-2} + \underline{X} \cdot z^{-1} + \underline{X}}{3} = \underline{X} \cdot \frac{z^{-2} + z^{-1} + 1}{3}}$$

und daraus die beiden Varianten der zugehörigen, gebrochen rationalen Übertragungs-Funktion.

$$\mathbf{\underline{G}(z^{-1}) = \frac{\underline{Y}(z^{-1})}{\underline{X}(z^{-1})} = \frac{z^{-2} + z^{-1} + 1}{3}} \quad \text{oder auch} \quad \mathbf{\underline{G}(z) = \frac{\underline{Y}(z)}{\underline{X}(z)} = \frac{1 + z + z^2}{3z^2}}$$

Auf Seite 68 ist dargestellt, wie | bei zeitkontnuierlichen Systemen | (Anfangswerte gleich Null)

aus der DGL die Übertragungs-Funktion $\mathbf{\underline{G}(s) = \underline{A}(s)/\underline{E}(s)}$

im Bildbereich der Laplace-Transformation aufgestellt werden kann. Dies ist eine gebrochen rationale Funktion in $\mathbf{s}$ mit reellen, konstanten Koeffizienten und die höchste im Zähler- oder Nennerpolynom auftretende Ordnung von $\mathbf{s}$ bestimmt ihren Grad.

$\mathbf{\underline{G}(s)}$ besitzt genau n Polstellen und n Nullstellen, die [wegen der reellen Koeffizienten] nur auf der reellen Achse oder als konjugiert komplexe Paare in der komplexen $\mathbf{s}-$ **Ebene** liegen können.

Die Lage der Polstellen von $\mathbf{\underline{G}(s)}$ in der s-Ebene bestimmt, ob sich ein System stabil verhält.

Stabiles Verhalten nur, wenn alle Polstellen einen negativen Realteil besitzen : $\mathbf{Re\{s_{\infty\mu} < 0\}}$

Analog dazu ist es | bei zeitdiskreten Anordnungen | (siehe die beiden Beispiele auf Seite 106) möglich,

aus der DIFFGL die zugehörige Übertragungs-Funktion $\mathbf{\underline{G}(z^{-1}) = \underline{A}(z^{-1})/\underline{E}(z^{-1})}$

im Bildbereich der z-Transformation zu ermitteln, aus der die gleichwertige Darstellung mit dem geänderten Argument $\mathbf{\underline{G}(z) = \underline{A}(z)/\underline{E}(z)}$ berechnet werden kann.

Beide Funktionen sind gebrochen rational und haben reelle, konstante Koeffizienten.

Die erste Funktion wird bevorzugt in der Summenform dargestellt und ihr Grad n wird durch die höchste im Zähler- oder im Nennerpolynom enthaltene Potenz von $\mathbf{z^{-1}}$ bestimmt: $\mathbf{n = max\{e, f\}}$.

$$\mathbf{\underline{G}(z^{-1}) = \frac{\underline{A}(z^{-1})}{\underline{E}(z^{-1})} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + \ldots + b_e z^{-e}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} + \ldots + a_f z^{-f}} = \frac{\sum_{i=0}^{e} b_i \cdot z^{-i}}{\sum_{j=0}^{f} a_j \cdot z^{-j}}}$$

Ü 69, Ü 70

Bei der zweiten Funktion wird sowohl die Summen- als auch die Produktform verwendet. Für den Grad gilt $\mathbf{n = max\{g, h\}}$.

$$\mathbf{\underline{G}(z) = \frac{\underline{A}(z)}{\underline{E}(z)} = \frac{c_0 + c_1 z^1 + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \ldots + c_g z^g}{d_0 + d_1 z^1 + d_2 z^2 + d_3 z^3 + \ldots + d_h z^h} = Q \cdot \frac{\prod_{k=1}^{g} (z - z_{0k})}{\prod_{l=1}^{h} (z - z_{\infty l})}\ ; \qquad Q = \frac{c_g}{d_h}}$$

$\mathbf{\underline{G}(z)}$ besitzt genau n Polstellen $\mathbf{z_{\infty l}}$ und n Nullstellen $\mathbf{z_{0k}}$, die einfach oder auch mehrfach aber in jedem Fall [wegen der reellen Koeffizienten] nur auf der reellen Achse oder als konjugiert komplexe Paare in der komplexen $\mathbf{z}-$ **Ebene** liegen können.

Die Lage der Polstellen von $\mathbf{\underline{G}(z)}$ in der z- Ebene bestimmt, ob sich ein System stabil verhält.

Stabiles Verhalten nur, wenn alle Polstellen innerhalb des Einheitskreises liegen : $\mathbf{|z_{\infty\mu}| < 1}$

Nötiges Vorgehen für die Umformung $\mathbf{\underline{G}(z^{-1}) = \underline{A}(z^{-1})/\underline{E}(z^{-1})} \quad \rightarrow \quad \mathbf{\underline{G}(z) = \underline{A}(z)/\underline{E}(z)}$

Zähler- und Nennerpolynom mit $\mathbf{z^n}$ [n $\widehat{=}$ Grad von $\mathbf{\underline{G}(z^{-1})}$] multiplizieren.

Bsp.: $\mathbf{\underline{G}(z^{-1}) = \frac{3z^{-4}+5z^{-3}+2z^{-2}+10z^{-1}+7}{12z^{-2}+8z^{-1}+20}}$; $\mathbf{\underline{G}(z) = \frac{3+5z^1+2z^2+10z^3+7z^4}{12z^2+8z^3+20z^4}}$

Nötiges Vorgehen für die Umformung $\mathbf{\underline{G}(z) = \underline{A}(z)/\underline{E}(z)} \quad \rightarrow \quad \mathbf{\underline{G}(z^{-1}) = \underline{A}(z^{-1})/\underline{E}(z^{-1})}$

Zähler- und Nennerpolynom mit $\mathbf{z^{-n}}$ [n $\widehat{=}$ Grad von $\mathbf{\underline{G}(z)}$] multiplizieren.

Bsp.: $\mathbf{\underline{G}(z) = \frac{30z}{4z^4+3z^3+2z^2+1z+100}}$; $\mathbf{\underline{G}(z^{-1}) = \frac{30z^{-3}}{4+3z^{-1}+2z^{-2}+1z^{-3}+100z^{-4}}}$;

Durch die Umkehrung des auf Seite 106 beschriebenen Vorgehens zur Ermittlung der Übertragungs-Funktion aus der DIFFGL und durch die Anwendung der Umformungen von Seite 107 ist es einfach möglich, aus der Summenform von $\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{z})$ oder $\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{z^{-1}})$ die DIFFGL zu ermitteln.

Interessiert man sich für die Frequenzabhängigkeit der komplexen Verstärkung eines zeitdiskreten Systems im eingeschwungenen Zustand, ist für $\mathbf{z^{\mp n}}$ überall der folgende, im allgemeinen Fall komplexe Wert für den Operator zur Beschreibung einer Verzögerung um ± n Abtastschritte zu setzen:

Es gilt: $\mathbf{T_S = \frac{1}{f_S}}$; $\mathbf{x = f\,T_S = \frac{f}{f_S}}$; $\mathbf{n\omega T_S = n2\pi x}$ und mit $\mathbf{z^{\mp n} = e^{\mp j\,\omega\,n\,T_S}}$ erhält man

$$\mathbf{z^{\mp n}(j\,\omega) = e^{\mp j\,\omega\,n\,T_S} = \cos(n\,\omega\,T_S) \mp j\,\sin(n\,\omega\,T_S) = \cos(n\,2\pi\,x) \mp j\,\sin(n\,2\pi\,x)}$$

Für n=1 und für n=2 sind die zu x = 0 (0.05) 0.5 gehörigen komplexen Werte von $\mathbf{z^{\mp n}(j\,\omega)}$ in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

$\mathbf{x = f/f_S}$	Wert von $\mathbf{z^{-1}}$	Wert von $\mathbf{z^{-2}}$	Wert von $\mathbf{z^{+1}}$	Wert von $\mathbf{z^{+2}}$
0.000	1.0000 + j 0.0000	1.0000 + j 0.0000	1.0000 + j 0.0000	1.0000 + j 0.0000
0.001	1.0000 - j 0.0063	0.9999 - j 0.0126	1.0000 + j 0.0063	0.9999 + j 0.0126
0.050	0.9511 - j 0.3090	0.8090 - j 0.5878	0.9511 + j 0.3090	0.8090 + j 0.5878
0.100	0.8090 - j 0.5878	0.3090 - j 0.9511	0.8090 + j 0.5878	0.3090 + j 0.9511
0.150	0.5878 - j 0.8090	-0.3090 - j 0.9511	0.5878 + j 0.8090	-0.3090 + j 0.9511
0.200	0.3090 - j 0.9511	-0.8090 - j 0.5878	0.3090 + j 0.9511	-0.8090 + j 0.5878
0.250	0.0000 - j 1.0000	-1.0000 + j 0.0000	0.0000 + j 1.0000	-1.0000 + j 0.0000
0.300	-0.3090 - j 0.9511	-0.8090 + j 0.5878	-0.3090 + j 0.9511	-0.8090 - j 0.5878
0.350	-0.5878 - j 0.8090	-0.3090 + j 0.9511	-0.5878 + j 0.8090	-0.3090 - j 0.9511
0.400	-0.8090 - j 0.5878	0.3090 + j 0.9511	-0.8090 + j 0.5878	0.3090 - j 0.9511
0.450	-0.9511 - j 0.3090	0.8090 + j 0.5878	-0.9511 + j 0.3090	0.8090 - j 0.5878
0.499	-1.0000 - j 0.0063	0.9999 + j 0.0126	-1.0000 + j 0.0063	0.9999 - j 0.0126
0.500	-1.0000 + j 0.0000	1.0000 + j 0.0000	-1.0000 + j 0.0000	1.0000 + j 0.0000

Setzt man in der Übertragungs-Funktion $\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{z = e^{j\,\omega T_S}})$ bzw. in $\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{z^{-1} = e^{-j\,\omega T_S}})$ die zur aktuellen Frequenz f gehörigen Werte für $\mathbf{z^n}$ bzw. $\mathbf{z^{-n}}$ ein, ergeben sich im Zähler und im Nenner zwei komplexe Zahlen, deren Quotient die komplexe Verstärkung des zeitdiskreten Systems bei der aktuellen Frequenz f im eingeschwungenen Zustand (d.h. bei Betrieb mit einem sinusförmigen Signal der Frequenz f) beschreibt. Wie jede komplexe Größe kann auch die Verstärkung wahlweise als Real- und Imaginärteil oder als Betrag und Winkel angegeben werden.

Beispiel: Gegeben ist $\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{z}) = \mathbf{\frac{2z}{z^2 - 0.25}}$ Gesucht: $\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{x = 0.200})$

Mit $\mathbf{z(x = 0.200) = 0.3090 + j\,0.9511}$ und $\mathbf{z^2(x = 0.200) = -0.8090 + j\,0.5878}$ folgt

$$\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{x = 0.200}) = \mathbf{\frac{2 \cdot [0.3090 + j\,0.9511]}{[-0.8090 + j\,0.5878] - 0.25} = \frac{0.6180 + j\,1.9022}{-1.0590 + j\,0.5878}}$$

Ü 66

$$\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{x = 0.200}) = \mathbf{0.3161 - j\,1.6208 = 1.6513 \cdot e^{-j78.97^\circ}}$$

Ermitteln Sie die zugehörige DIFFGL und geben Sie eine Realisierung für sie an.

Der Frequenzgang der Verstärkung kann erst dann zutreffend dargestellt werden, wenn ausreichend viele Frequenzpunkte [z.B. 200] untersucht wurden. Für die Frequenzachse wählt man bei zeitdiskreten Systemen gewöhnlich eine lineare Teilung [Im Bode-Diagramm dagegen eine logarithmische Skalierung!], da der technisch nutzbare Frequenzbereich meist auf $\mathbf{0 \le x < 0.5}$ begrenzt ist.

Mit dem Programm **ZEITDISK** lässt sich das Verhalten einfacher zeitdiskreter Systeme bis zum Grad n = 6 untersuchen. Die Eingabe erfolgt per DIFFGL oder per Übertragungs-Funktion.

7.3.1 Grenzwertsätze, Operationen und Korrespondenzen der z-Transformation

So wie sich mit der Laplace-Transformation die Lösungen der DGL kontinuierlicher Systeme leichter im Bildbereich (s-Ebene) berechnen lassen, bietet die z-Transformation Vorteile bei der Berechnung der Lösungen der DIFFGL in deren Bildbereich (z-Ebene).

Anfangswert: $f[0] = \lim_{z\to\infty} F(z)$

Endwert: $\lim_{k\to\infty} f[k] = \lim_{z\to 1}[(z-1)\cdot F(z)] = \lim_{z^{-1}\to 1}[\frac{1-z^{-1}}{z^{-1}}\cdot F(z^{-1})]$

Operationen der z-Transformation

- Berücksichtigung einer Konstante C :
  $\mathcal{Z}\{\ C\cdot f[k]\ \} \quad\Rightarrow\quad C\cdot\mathcal{Z}\{\ f[k]\ \} = C\cdot F(z)$
- Summation von 0 bis k-1 : $\sum_{\nu=0}^{k-1} f[\nu] \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{z-1}\cdot F(z)$
  Summation von 0 bis k : $\sum_{\nu=0}^{k} f[\nu] \quad\Rightarrow\quad \frac{z}{z-1}\cdot F(z)$
- Dämpfungssatz, "Dämpfung" der Zeitfunktion :
  $a^k\cdot f[k] \quad\Rightarrow\quad F(\frac{z}{a})$ oder auch gleichwertig in der Form $a^{-k}\cdot f[k] \quad\Rightarrow\quad F(a\cdot z)$
  mit $a\neq 0$; $a \mathrel{\widehat{=}}$ reell oder komplex
- Differenzieren der Bildfunktion :
  $k\cdot f[k] \quad\Rightarrow\quad -z\cdot\frac{dF(z)}{dz}$
- Verschiebungssatz im Zeitbereich [Verzögerung, Verschiebung nach rechts] :
  $f[k-m] \Rightarrow z^{-m}F(z) \quad m=0,1,2,\ldots$ wenn gilt $f[k-m]=0$ für $k-m<0$.
- Gewichtete Addition :
  $c_1\cdot f_1[k] + c_2\cdot f_2[k] \quad\Rightarrow\quad c_1\cdot F_1(z) + c_2\cdot F_2(z)$

Korrespondenz-Tabelle Es gilt **$\mathbf{k\geq 0}$, und ganzzahlig** **a** $\mathrel{\widehat{=}}$ reell oder komplex

Nr.	Bildfunktion $F(z)$	Bildfunktion $F(z^{-1})$	Zeitfunktion $f(k\cdot T_S)=f[k]$
1	1	1	$\delta[k]$ (Einheitsimpuls)
2	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\sigma[k]$ (Einheitsprung)
3	$\frac{z}{z+1}$	$\frac{1}{1+z^{-1}}$	$(-1)^k\cdot\sigma[k]$
4	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$k\cdot\sigma[k]$
5	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$	$\frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$	$k^2\cdot\sigma[k]$
6	$\frac{z}{z-a}$	$\frac{1}{1-a\cdot z^{-1}}$	$a^k\cdot\sigma[k] = (e^{-T_S/\tau})^k\cdot\sigma[k]$
7	$\frac{z}{(z-a)^2}$	$\frac{z^{-1}}{(1-a\cdot z^{-1})^2}$	$k\cdot a^{k-1}\cdot\sigma[k]$
8	$\frac{z(1-a)}{z^2-z(1+a)+a}$	$\frac{z^{-1}(1-a)}{1-z^{-1}(1+a)+az^{-2}}$	$(1-a^k)\cdot\sigma[k] = [1-(e^{-T_S/\tau})^k]\cdot\sigma[k]$
9	$\frac{a\cdot z\cdot\sin\phi}{z^2-2a\cdot z\cdot\cos\phi+a^2}$	$\frac{a\cdot z^{-1}\sin\phi}{1-2a\cdot z^{-1}\cos\phi+a^2z^{-2}}$	$a^k\cdot\sin(k\phi)\cdot\sigma[k]$
10	$\frac{z(z-a\cdot\cos\phi)}{z^2-2a\cdot z\cdot\cos\phi+a^2}$	$\frac{1-a\cdot z^{-1}\cos\phi}{1-2a\cdot z^{-1}\cos\phi+a^2z^{-2}}$	$a^k\cdot\cos(k\phi)\cdot\sigma[k]$

7.3.2 Beispiele zur Anwendung des Dämpfungssatzes von Seite 109

1.) Ausgangspunkt Einheitssprungfolge: Zur Bildfunktion $\mathbf{\underline{F}_1(z) = \frac{z}{z-1}}$

gehört nach Seite 109 Nr. 1 im Zeitbereich die Folge $\mathbf{f_1[k] = \sigma[k]}$ mit den Werten

$\mathbf{f_1[0] = 1.0000;\ f_1[1] = 1.0000;\ f_1[2] = 1.0000;\ f_1[3] = 1.0000;\ f_1[4] = 1.0000;\ f_1[5] = 1.0000;\ \ldots}$

Die Singularitäten der Bildfunktion $\mathbf{\underline{F}_1(z)}$ sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst.

Polstelle bei	Nullstelle bei	Aussage zur "Stabilität" der Bildfunktion
$\mathbf{z_\infty = 1}$	$\mathbf{z_0 = 0}$	Die Polstelle liegt auf dem Rand des EK ⇒ "grenzstabil"

Ersetzt man in der Bildfunktion $\mathbf{\underline{F}_1(z)}$ gemäß Seite 109 $\mathbf{z \longrightarrow \frac{z}{a}}$ findet man die neue Bildfunktion $\mathbf{\underline{\widetilde{F}}_1(z) = \frac{z/a}{z/a-1} = \frac{z}{z-a}}$ die nach Seite 109 Nr. 6

im Zeitbereich die exponentiell abklingende, "gedämpfte" Folge

$\mathbf{f_1[k] = a^k}$ ergibt und für $\mathbf{a = 0.7}$ die folgenden Werte annimmt.

$\mathbf{\tilde{f}_1[0] = 1.0000;\ \tilde{f}_1[1] = 0.7000;\ \tilde{f}_1[2] = 0.4900;\ \tilde{f}_1[3] = 0.3430;\ \tilde{f}_1[4] = 0.2401;\ \tilde{f}_1[5] = 0.1681;\ \ldots}$

Die folgende Tabelle zeigt die Singularitäten der modifizierten Bildfunktion $\mathbf{\underline{\widetilde{F}}_1(z)}$.

Polstelle bei	Nullstelle bei	Aussage zur "Stabilität" der Bildfunktion
$\mathbf{z_\infty = a = 0.7}$	$\mathbf{z_0 = 0}$	Die Polstelle liegt im Inneren des EK ⇒ "stabil"

2.) Ausgangspunkt ungedämpfte Sinusfolge: Die Bildfunktion $\mathbf{\underline{F}(z) = \frac{a \cdot z \cdot \sin(\Phi)}{z^2 - 2 \cdot a \cdot z \cdot \cos(\Phi) + a^2}}$

ergibt beispielhaft mit den Kennwerten $\mathbf{a = 1}$; $\mathbf{\Phi = 90°}$ die Bildfunktion

$\mathbf{\underline{F}_2(z) = \frac{z \cdot \sin(\Phi)}{z^2 - 2 \cdot z \cdot \cos(\Phi) + 1} = \frac{z}{z^2+1}}$, die nun modifiziert werden soll.

Nach Seite 109 Nr. 9 entspricht ihr im Zeitbereich die Folge $\mathbf{f_2[k] = \sin(k \cdot 90°)}$ mit den Werten

$\mathbf{f_1[0] = 0.0000;\ f_1[1] = 1.0000;\ f_1[2] = 0.0000;\ f_1[3] = -1.0000;\ f_1[4] = 0.0000;\ f_1[5] = 1.0000;\ \ldots}$

Die Singularitäten der Bildfunktion $\mathbf{\underline{F}_2(z)}$ sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst.

Polstellen bei	Nullstellen bei	Aussage zur "Stabilität" der Bildfunktion
$\mathbf{z_{\infty 1} = +j}$	$\mathbf{z_{0 1} = 0}$	Beide Polstellen liegen auf dem Rand des EK ⇒ "grenzstabil"
$\mathbf{z_{\infty 2} = -j}$	$\mathbf{z_{0 2} \to \infty}$	Beide Polstellen liegen auf dem Rand des EK ⇒ "grenzstabil"

Ersetzt man in der Bildfunktion $\mathbf{\underline{F}_2(z)}$ gemäß Seite 109 $\mathbf{z \longrightarrow \frac{z}{a}}$ findet man die neue Bildfunktion $\mathbf{\underline{\widetilde{F}}_2(z) = \frac{z/a}{(z/a)^2+1} = \frac{a \cdot z}{z^2+a^2}}$, die nach Seite 109 Nr. 9

im Zeitbereich die exponentiell abklingende, "gedämpfte" Sinusfolge

$\mathbf{f_2[k] = a^k \cdot \sin(k \cdot 90°)}$ ergibt und für $\mathbf{a = 0.5}$ die folgenden Werte annimmt.

$\mathbf{\tilde{f}_2[0] = 0.0000;\ \tilde{f}_2[1] = 0.5000;\ \tilde{f}_2[2] = 0.0000;\ \tilde{f}_2[3] = -0.1250;\ \tilde{f}_2[4] = 0.0000;\ \tilde{f}_2[5] = 0.03125;\ \ldots}$

Die folgende Tabelle zeigt die Singularitäten der modifizierten Bildfunktion $\mathbf{\underline{\widetilde{F}}_2(z)}$.

Polstellen bei	Nullstellen bei	Aussage zur "Stabilität" der Bildfunktion
$\mathbf{z_{\infty 1} = +j\,0.5}$	$\mathbf{z_{0 1} = 0}$	Beide Polstellen liegen im Inneren des EK ⇒ "stabil"
$\mathbf{z_{\infty 2} = -j\,0.5}$	$\mathbf{z_{0 2} \to \infty}$	Beide Polstellen liegen im Inneren des EK ⇒ "stabil"

8 Bilinear-Transformation, Realisierung von DIFFGL

In diesem Kapitel wird zunächst der wichtigste Weg besprochen, um ausgehend von einer kontinuierlichen Übertragungs-Funktion $\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{s})$ eine zeitdiskrete Übertragungs-Funktion $\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{z})$ bzw. $\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{z^{-1}})$ zu ermitteln, bei der das Verhalten des kontinuierlichen System im Wesentlichen erhalten bleibt.

Danach werden einfache Realisierungen für die beiden Grundtypen von DIFFGL besprochen.

8.1 Berechnung zeitdiskreter Ü.-Fkt. mit der Bilinear-Transformation

Auf Seite 106 wurde als 1. Beispiel zunächst die DIFFGL und dann auch die Übertragungs-Funktion eines Integrators aufgestellt, der nach der Trapezregel eine Näherung des Integrals über eine zeitdiskrete Wertefolge ermittelt. Als Ergebnis wurden die folgenden Funktionen gefunden.

$$\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{z^{-1}}) = \frac{\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{z^{-1}})}{\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{z^{-1}})} = \frac{\mathbf{T_S}}{\mathbf{2}} \cdot \frac{\mathbf{1+z^{-1}}}{\mathbf{1-z^{-1}}} \quad \text{oder auch} \quad \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{z}) = \frac{\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{z})}{\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{z})} = \frac{\mathbf{T_S}}{\mathbf{2}} \cdot \frac{\mathbf{z+1}}{\mathbf{z-1}}$$

Vergleicht man diese Übertragungs-Funktionen des zeitdiskreten (Trapez-) Integrators mit der Übertragungs-Funktion eines idealen zeitkontinuierlichen Integrators

$$\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{s}) = \frac{\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{s})}{\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{s})} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{s}} \ ,$$

lässt sich die wichtige Beziehung zwischen der (für die kontinuierliche Betrachtung maßgeblichen) s-Ebene und der (für die zeitdiskrete Betrachtung wichtigen) z-Ebene ermitteln

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{s}} \implies \frac{\mathbf{T_S}}{\mathbf{2}} \cdot \frac{\mathbf{1+z^{-1}}}{\mathbf{1-z^{-1}}} = \frac{\mathbf{T_S}}{\mathbf{2}} \cdot \frac{\mathbf{z+1}}{\mathbf{z-1}} \quad \text{und daraus} \quad \boxed{\mathbf{s} \implies \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{T_S}} \cdot \frac{\mathbf{1-z^{-1}}}{\mathbf{1+z^{-1}}} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{T_S}} \cdot \frac{\mathbf{z-1}}{\mathbf{z+1}}}$$

die wegen ihrer Bauform BILINEAR-TRANSFORMATION genannt oder auch als TUSTIN-GLEICHUNG bezeichnet wird. Vertiefen Sie ihr Verständnis mit dem Programm **BILINEAR** .

Ersetzt man in einer zeitkontinuierlichen Übertragungs-Funktion $\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{s})$ vom Grad n die komplexe Frequenzvariable s an jeder Stelle durch den oben stehenden Ausdruck, erhält man eine zeitdiskrete Übertragungs-Funktion $\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{z})$ oder $\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{z^{-1}})$ die ebenfalls vom Grad n ist.

Diese Transformation bewirkt einige Besonderheiten, die im Folgenden erläutert werden.

Wertet man den Frequenzgang des exakten kontinuierlichen Integrators für $\mathbf{s = j\,\omega = j\,2\pi f}$ und den des angenäherten zeitdiskreten Integrators für $\mathbf{\widetilde{s} = j\,\widetilde{\omega} = j\,2\pi\widetilde{f}}$ aus, erfasst man jeweils den eingeschwungenen Zustand. Die Frequenz für das zeitdiskrete System wird zur Unterscheidung mit einer Tilde versehen. Man erhält ausgehend von der zeitkontinuierlichen Funktion

$$\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{s = j\,\omega}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{j\,2\pi f}}$$

Ü 74

mit $\mathbf{z = e^{j\,\widetilde{\omega} T_S} = e^{j\,2\pi \widetilde{f} T_S} = e^{j\,2\pi \widetilde{f}/f_S} = e^{j\,2\pi x}}$; $\mathbf{x = \widetilde{f}/f_S}$ für die zeitdiskrete Funktion

$$\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{z = e^{j\,2\pi x}}) = \frac{\mathbf{T_S}}{\mathbf{2}} \cdot \frac{\mathbf{e^{j\,2\pi x}+1}}{\mathbf{e^{j\,2\pi x}-1}} = \frac{\mathbf{T_S}}{\mathbf{2}} \cdot \frac{\mathbf{e^{j\,\pi x}+e^{-j\,\pi x}}}{\mathbf{e^{j\,\pi x}-e^{-j\,\pi x}}} = \frac{\mathbf{T_S}}{\mathbf{2}} \cdot \frac{\mathbf{2 \cdot \cos(\pi x)}}{\mathbf{2 \cdot j \cdot \sin(\pi x)}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{j\,2 f_S \cdot \tan(\pi x)}}$$

Stürzt man die beiden Ergebnisse für $\underline{\mathbf{G}}$ und ersetzt im letzten Ausdruck $\mathbf{x = \widetilde{f}/f_S}$ findet man eine Gleichung, die die nichtlineare Verzerrung der Frequenzachse durch die Bilinear-Transformation beschreibt.

$$\mathbf{j\,2\pi f = j\,2 f_S \cdot \tan(\pi \frac{\widetilde{f}}{f_S})} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{f(\widetilde{f}) = \frac{f_S}{\pi} \cdot \tan(\pi \frac{\widetilde{f}}{f_S})} \ ; \qquad \mathbf{\widetilde{f}(f) = \frac{f_S}{\pi} \cdot \arctan(\pi \frac{f}{f_S})}}$$

ACHTUNG: Alle Frequenz-Umrechnungen müssen im BOGENMASS ausgeführt werden !!

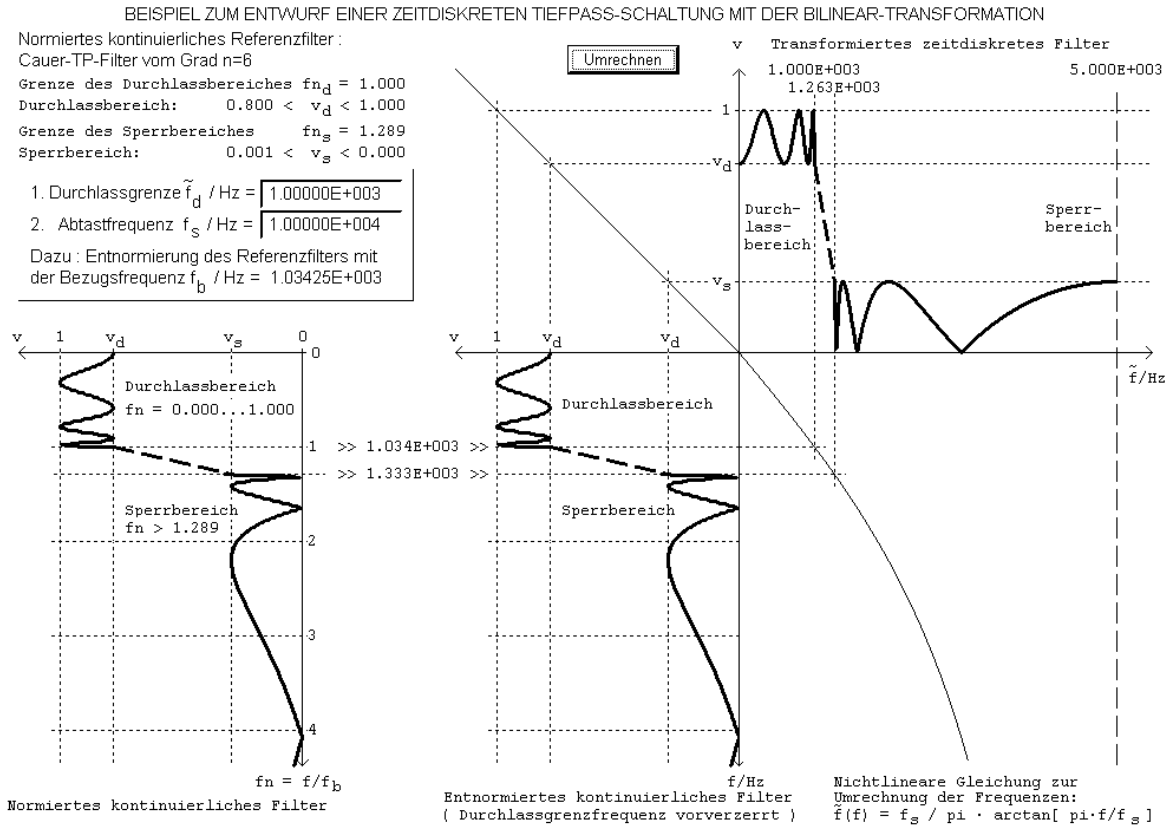
Die Transformation bewirkt, dass ein bestimmtes Verhalten (z.B. Verstärkung, Winkel), das im kontinuierlichen Fall bei der Frequenz $\mathbf{f}$ auftritt, im zeitdiskreten Fall bei der Frequenz $\mathbf{\widetilde{f}}$ auftritt.

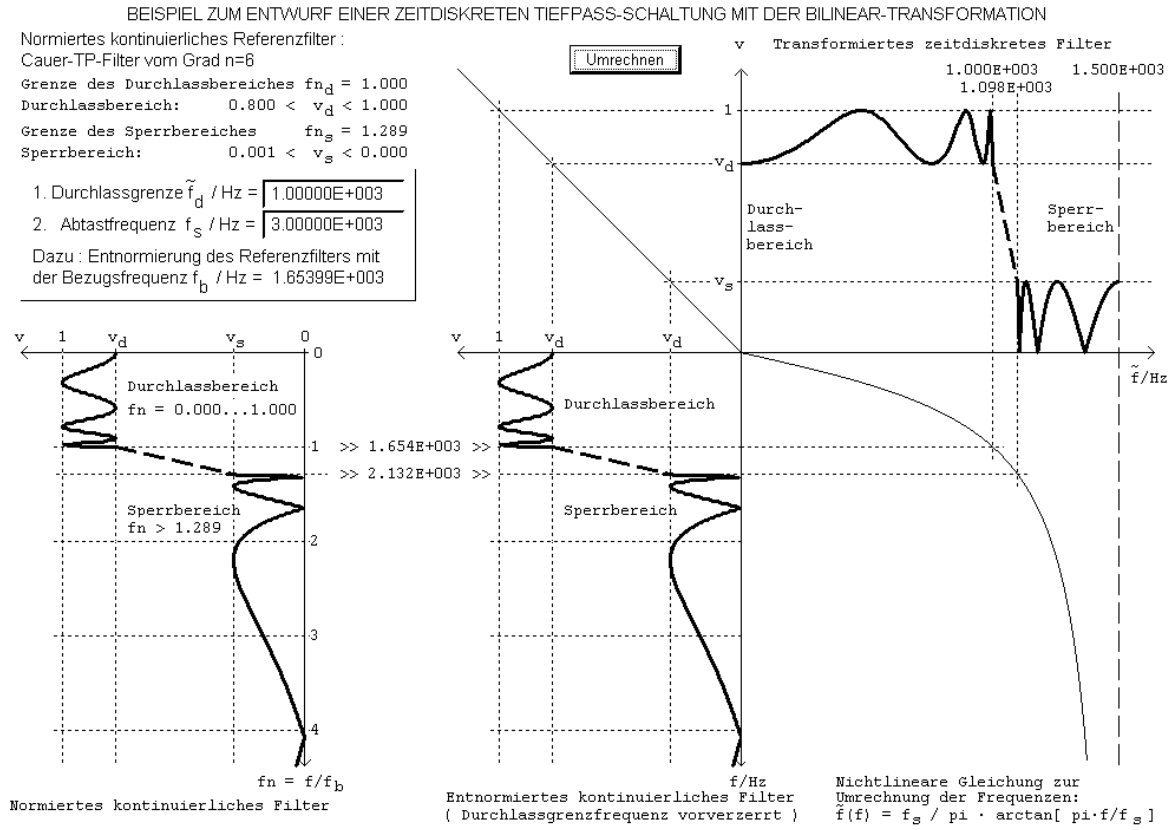
Wohin werden die beiden (kontinuierlichen) Frequenzen $\mathbf{f = 0}$ und $\mathbf{f \to \infty}$ transformiert?

Die beiden Bilder zeigen die Verstärkungen eines Cauer-Tiefpassfilters vom Grad n=6, das mit der Bilinear-Transformation für verschiedene Abtastfrequenzen in zeitdiskrete Anordnungen transformiert wurde.

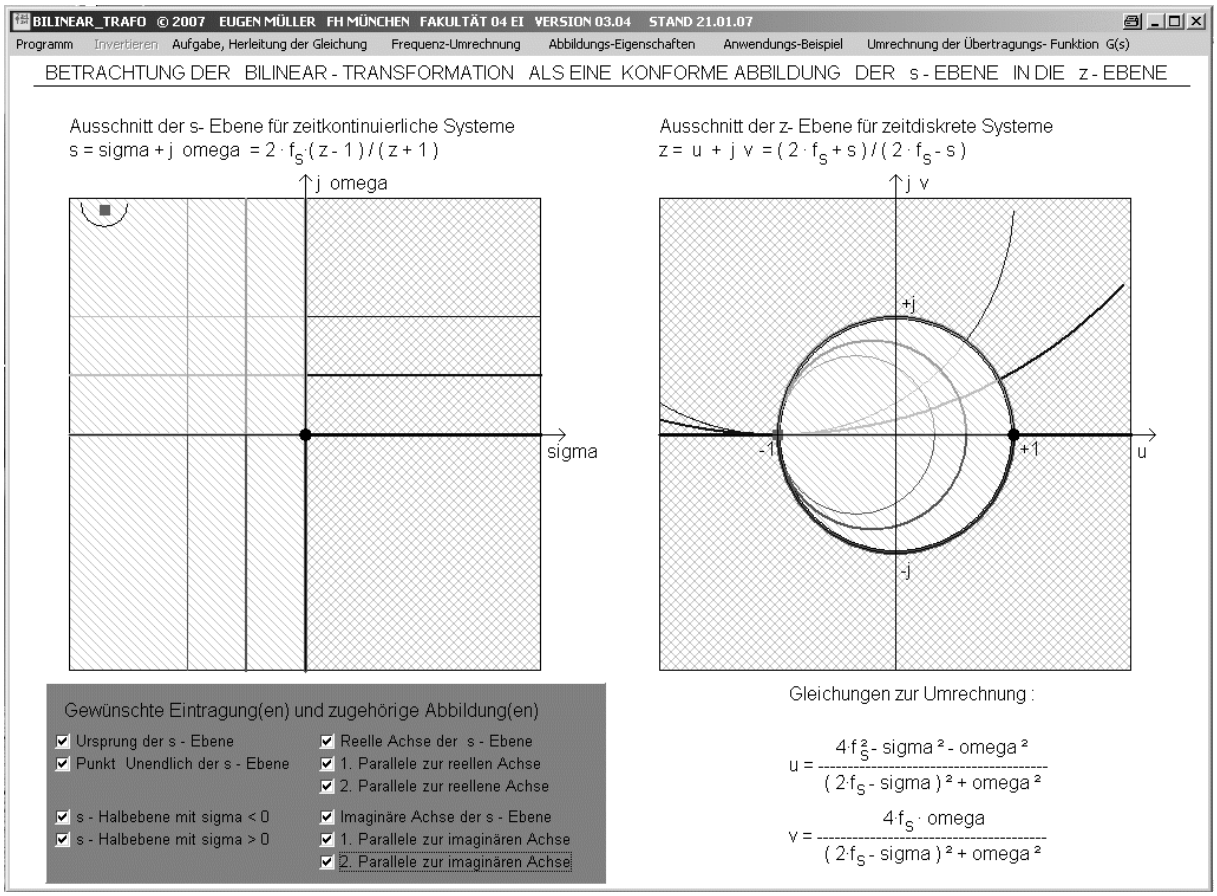
Beachten Sie besonders die unterschiedlichen Breiten der Durchlass- und Sperrbereiche.

Die Bilder wurden mit dem Programm **BILINEAR** erstellt.





Das Bild zeigt die Eigenschaften der Bilinear-Transformation, mit der die s-Ebene in die z-Ebene abgebildet wird. Beachten Sie besonders, wo die linke s-Halbebene und die Punkte $\mathbf{s = 0}$ sowie $\mathbf{s \to \infty}$ in der z-Ebene zu liegen kommen.



Anwendung der Bilinear-Transformation auf Übertragungs-Funktionen $\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{s})$ vom Grad 1 und 2.

Ersetzt man in den Übertragungs-Funktionen $\underline{\mathbf{G}}_\mathbf{1}(\mathbf{s})$, $\underline{\mathbf{G}}_\mathbf{2}(\mathbf{s})$ $\mathbf{s}$ wie folgt $\boxed{\mathbf{s \Rightarrow \frac{2}{T_S} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}}$, erhält man die zeitdiskreten Übertragungs-Funktionen $\underline{\mathbf{G}}_\mathbf{1}(\mathbf{z^{-1}})$, $\underline{\mathbf{G}}_\mathbf{2}(\mathbf{z^{-1}})$. Diese sind hier so umgeformt, dass sie direkt mit der später zu behandelnden IIR-Struktur realisiert werden können.

Aus $\boxed{\underline{\mathbf{G}}_\mathbf{1}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{d_0 + d_1 s}}{\mathbf{c_0 + c_1 s}}}$ erhält man die Funktion $\boxed{\underline{\mathbf{G}}_\mathbf{1}(\mathbf{z^{-1}}) = \frac{\mathbf{b_0 + b_1 z^{-1}}}{\mathbf{1 + a_1 z^{-1}}}}$

mit den Koeffizienten

$$\mathbf{b_0 = [\, d_0 T_S + 2 d_1 \,] / K_1 \;;} \qquad \boxed{\mathbf{K_1 = c_0 T_S + 2 c_1}}$$
$$\mathbf{b_1 = [\, d_0 T_S - 2 d_1 \,] / K_1 \;;} \qquad \mathbf{a_1 = [\, c_0 T_S - 2 c_1 \,] / K_1}$$

Aus $\boxed{\underline{\mathbf{G}}_\mathbf{2}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{d_0 + d_1 s + d_2 s^2}}{\mathbf{c_0 + c_1 s + c_2 s^2}}}$ erhält man die Funktion $\boxed{\underline{\mathbf{G}}_\mathbf{2}(\mathbf{z^{-1}}) = \frac{\mathbf{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}}{\mathbf{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}}}$

mit den Koeffizienten

$$\mathbf{b_0 = [\, d_0 T_S^2 + 2 d_1 T_S + 4 d_2 \,] / K_2 \;;} \qquad \boxed{\mathbf{K_2 = c_0 T_S^2 + 2 c_1 T_S + 4 c_2}}$$
$$\mathbf{b_1 = [\, 2 d_0 T_S^2 - 8 d_2 \,] / K_2 \;;} \qquad \mathbf{a_1 = [\, 2 c_0 T_S^2 - 8 c_2 \,] / K_2}$$
$$\mathbf{b_2 = [\, d_0 T_S^2 - 2 d_1 T_S + 4 d_2 \,] / K_2 \;;} \qquad \mathbf{a_2 = [\, c_0 T_S^2 - 2 c_1 T_S + 4 c_2 \,] / K_2}$$

8.2 Realisierung zeitdiskreter Systeme

Zur technischen Realisierung von DIFFGL werden nur die drei verschiedene Elemente benötigt, um die erforderlichen Signaloperationen durchzuführen:

- Addierer zur Addition / Subtraktion vorzeichenbehafteter (reeller) Zahlen.
- Multiplizierer zum Multiplizieren der Signalwerte, die als (reelle) Zahlen dargestellt sind.
- Verzögerungselemente zum Speichern der Signalwerte der Vergangenheit.

Gewöhnlich werden Addierer und Multiplizierer im Zeitmultiplex mehrfach genutzt und die Indexunterschiede zum Berücksichtigen der Verzögerungen nicht durch Schieberegister sondern durch eine geschickte Adressierung unter Verwendung von RAM-Speicherzellen erreicht.

Besonders effektiv arbeiten digitale Signalprozessoren. Das sind Spezialrechner mit Fest- oder Gleitkommaarithmetik, deren Aufbau für das schnelle Abarbeiten von DIFFGL, d.h. für das schnelle Multiplizieren und Addieren von Zahlen (Taktfrequenzen bis in den GHz-Bereich) optimiert ist.

Die zur Erzielung von frequenzabhängigen Übertragungs-Funktionen erforderlichen frequenzabhängigen Phasenverschiebungen werden durch die Verzögerungselemente hervorgerufen (Siehe Seite 95).

8.2.1 Realisierung ohne Signalrückkopplungen: Transversal- oder FIR-Struktur

Wird bei einer DIFFGL das Ausgangssignal $\mathbf{y[k]}$ in der folgenden Form

$$\mathbf{y[k] = b_0 \cdot x[k] + b_1 \cdot x[k-1] + b_2 \cdot x[k-2] + b_3 \cdot x[k-3]}.$$

aus einer gewichteten Summe verzögerter Signalwerte $\mathbf{x[k]}$ am Eingang gebildet, findet man für die zugehörige Übertragungs-Funktion (z.B. vom Grad $n = 3$) die beiden Darstellungen

$$\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{z^{-1}}) = \frac{\underline{\mathbf{Y}}}{\underline{\mathbf{X}}} = \mathbf{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}} \quad ; \quad \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{z}) = \frac{\underline{\mathbf{Y}}}{\underline{\mathbf{X}}} = \frac{\mathbf{b_0 z^3 + b_1 z^2 + b_2 z^1 + b_3}}{\mathbf{z^3}}$$

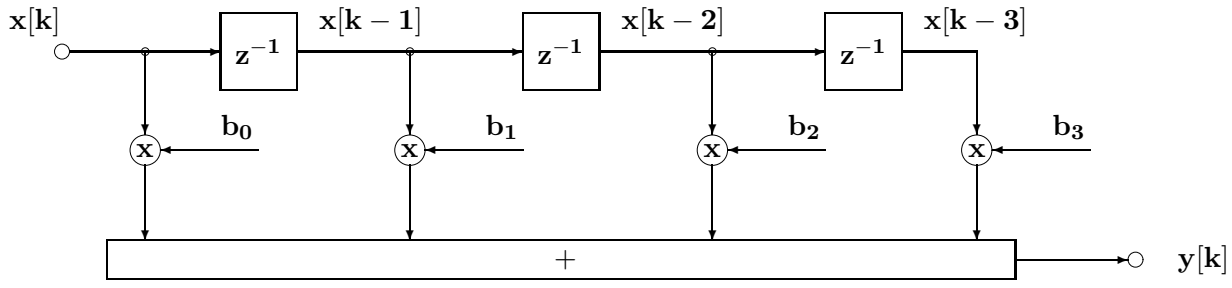
die zur Realisierung [$\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{z^{-1}})$] bzw. zur Ermittlung der Singularitäten [$\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{z})$] benötigt werden.

Beim Grad n besitzt $\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{z})$ in der z-Ebene n Nullstellen und einen n-fachen Pol bei z = 0.

Der Frequenzgang (d.h. das Filterverhalten) kann nur durch die Lage der Nullstellen beeinflusst werden!

Nur in diesem Fall ist eine Realisierung ohne Signalrückkopplungen möglich,

die TRANSVERSAL-STRUKTUR oder FIR-STRUKTUR genannt wird.



Die englische Bezeichnung F(inite) I(mpulse) R(esponse) leitet sich von der Impulsantwort dieser Struktur ab, die entsprechend der Länge der Verzögerungskette zeitlich begrenzt ist.

FIR-Anordnungen sind kausal, immer stabil (alle Pole bei z=0) und besitzen eine kleine Empfindlichkeit der komplexen Verstärkung gegenüber Änderungen der Koeffizienten $\mathbf{b_i}$. Sie falten das Eingangssignal $\mathbf{x[k]}$ mit ihrer Einheits-Impulsantwort $\mathbf{g[k]}$ (Siehe Seite 125).

FIR-Anordnungen werden z.B. auch als 'Echokompensatoren' (mit adaptiver Einstellung der Koeffizienten für Datenübertragung, zur Reduktion von Fahrgeräuschen in Autos, ...) eingesetzt.

Zu FIR-Anordnungen gibt es bei den zeitkontinuierlichen Systemen keine Entsprechung.

Es ist möglich, kausale FIR-Filter zu entwerfen, deren Phasenwinkelverlauf mit wachsender Frequenz linear abnimmt. Daraus folgt eine konstante Gruppenlaufzeit $\tau_{\mathbf{gr}}(\omega) = -\frac{\mathbf{d}\varphi(\omega)}{\mathbf{d}\omega}$, die bei vielen technischen Anwendungen erwünscht aber bei kontiniuerlichen Filtern nicht exakt erreichbar ist.

Diese Eigenschaft ergibt sich durch eine der folgenden vier Symmetrien bei der Festlegung der Koeffizienten der DIFFGL die ja den Werten $\mathbf{g[k]}$ der EIA des FIR-Filters gleich sind.

In den folgenden Beispielen werden aus Gründen der Übersichtlichkeit kleine Werte von n verwendet, auch wenn in der Praxis n durchaus den Wert 128 oder (viel) größer annimmt.

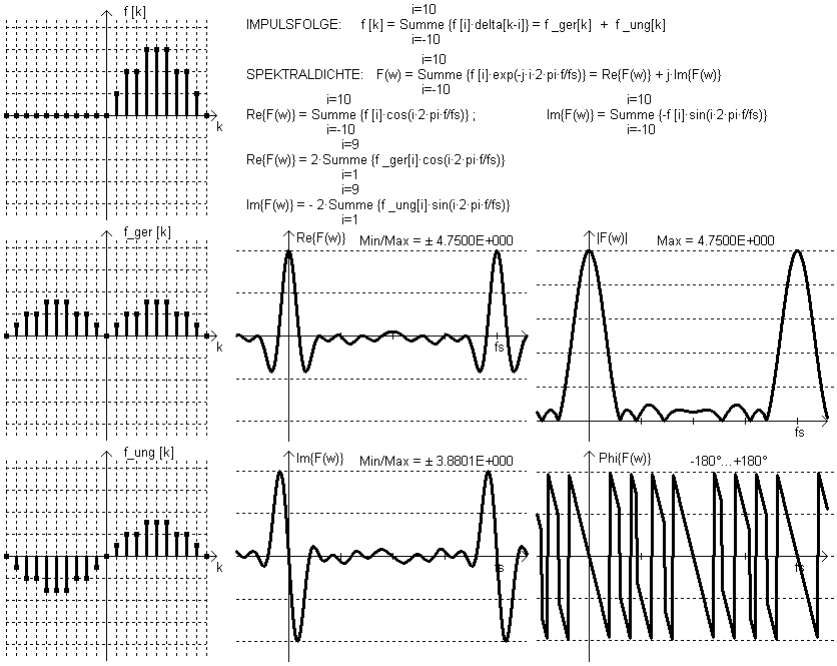
Vertiefen Sie Ihr Verständnis mit den Programmen **FIR** und **IMPULSE** .

Fall 1: Gerade Symmetrie

Berücksichtigt man eine Zeitverschiebung bis zur Mitte der EIA (bei k=5), liegt eine Achsensymmetrie vor und man kann zu dem Impuls bei k=5 die anderen Impulse paarweise
(k=1 , k=9; k=2 , k=8;
k=3 , k=7; k=4 , k=6)
zu jeweils einer reellen Cosinusfunktion zusammenzufassen.

Das hat zur Folge, dass solche Filter tiefe Frequenzen übertragen und bei geeigneter Dimensionierung TP realisieren können.

Die Steigung des Phasenwinkelverlaufes ergibt sich aus der Zeitverschiebung bis zur Mitte der EIA.

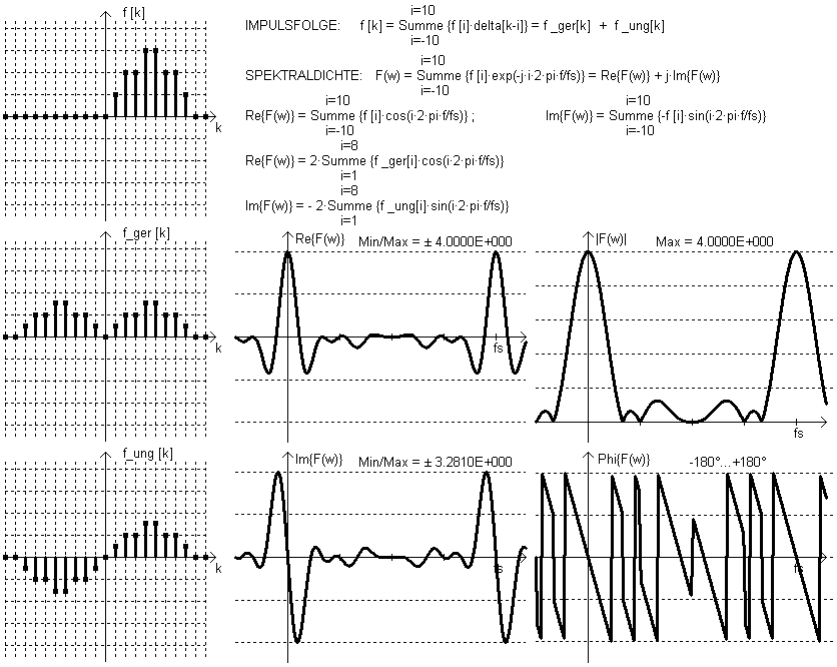


Fall 2: Gerade Symmetrie

Berücksichtigt man eine Zeitverschiebung bis zur Mitte der EIA (bei k=4.5) liegt eine Achsensymmetrie vor und man kann die Impulse paarweise
(k=1 , k=8; k=2 , k=7;
k=3 , k=6; k=4 , k=5)
zu jeweils einer reellen Cosinusfunktion zusammenzufassen.

Das hat zur Folge, dass solche Filter tiefe Frequenzen übertragen aber hohe sperren und somit für TP geeignet sind.

Die Steigung des Phasenwinkelverlaufes ergibt sich aus der Zeitverschiebung bis zur Mitte der EIA.

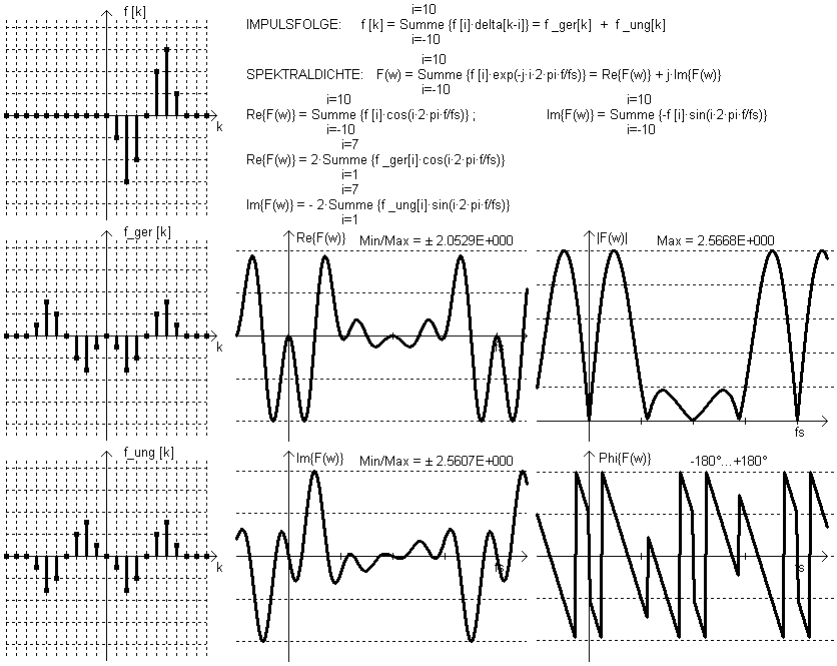


Fall 3: Ungerade Symmetrie

Berücksichtigt man eine Zeitverschiebung bis zur Mitte der EIA (bei k=4), liegt eine Punktsymmetrie vor und man kann die Impulse paarweise
(k=1 , k=7; k=2 , k=6; k=3 , k=5) zu jeweils einer imaginären Sinusfunktion zusammenzufassen.

Das hat zur Folge, dass solche Filter tiefe und hohe Frequenzen sperren und deshalb für BP geeignet sind.

Die Steigung des Phasenwinkelverlaufes ergibt sich aus der Zeitverschiebung bis zur Mitte der EIA.

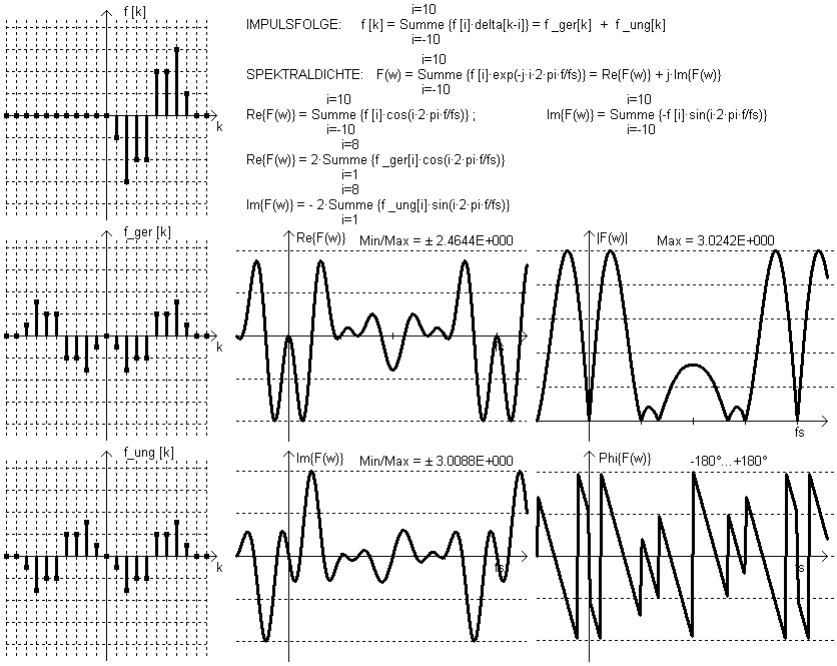


Fall 4: Ungerade Symmetrie

Berücksichtigt man eine Zeitverschiebung bis zur Mitte der EIA (bei k=4.5) liegt eine Punktsymmetrie vor und man kann die Impulse paarweise
(k=1 , k=8; k=2 , k=7; k=3 , k=6; k=4 , k=5) zu jeweils einer imaginären Sinusfunktion zusammenzufassen.

Das hat zur Folge, dass solche Filter tiefe Frequenzen sperren und deshalb bei entsprechender Dimensionierung für HP oder BP geeignet sind.

Die Steigung des Phasenwinkelverlaufes ergibt sich aus der Zeitverschiebung bis zur Mitte der EIA.



Mit den oben angegebenen Überlegungen lassen sich die Spektraldichtefunktionen $\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{j}\omega)$ für die vier betrachteten Beispiele relativ einfach angegeben:

1. Die Exponentialfunktion beschreibt die Zeitverschiebung bis zur Mitte der EIA (durch sie wird der frequenzabhängige Phasenwinkel hervorgerufen) und
2. die Ausdrücke in den eckigen Klammern erfassen die Wirkungen aller Impulse (die in ihrer Summe den Betragsverlauf bestimmen).

$$\underline{\mathbf{G_1}}(\mathbf{j}\omega) = \mathbf{e}^{-\mathbf{j}\,\omega\mathbf{5T_S}} \cdot [\,\mathbf{g[5]} + \mathbf{2g[4]cos}(\omega\mathbf{T_S}) + \mathbf{2g[3]cos}(\mathbf{2}\omega\mathbf{T_S}) + \mathbf{2g[2]cos}(\mathbf{3}\omega\mathbf{T_S}) + \mathbf{2g[1]cos}(\mathbf{4}\omega\mathbf{T_S})\,]$$

$$\underline{\mathbf{G_2}}(\mathbf{j}\omega) = \mathbf{e}^{-\mathbf{j}\,\omega\mathbf{4.5T_S}} \cdot [\,\mathbf{2g[4]cos}(\mathbf{0.5}\omega\mathbf{T_S}) + \mathbf{2g[3]cos}(\mathbf{1.5}\omega\mathbf{T_S}) + \mathbf{2g[2]cos}(\mathbf{2.5}\omega\mathbf{T_S}) + \mathbf{2g[1]cos}(\mathbf{3.5}\omega\mathbf{T_S})\,]$$

$$\underline{\mathbf{G_3}}(\mathbf{j}\omega) = \mathbf{j}\,\mathbf{e}^{-\mathbf{j}\,\omega\mathbf{4T_S}} \cdot [\,\mathbf{2g[3]sin}(\omega\mathbf{T_S}) + \mathbf{2g[2]sin}(\mathbf{2}\omega\mathbf{T_S}) + \mathbf{2g[1]sin}(\mathbf{3}\omega\mathbf{T_S})\,]$$

$$\underline{\mathbf{G_4}}(\mathbf{j}\omega) = \mathbf{j}\,\mathbf{e}^{-\mathbf{j}\,\omega\mathbf{4.5T_S}} \cdot [\,\mathbf{2g[4]sin}(\mathbf{0.5}\omega\mathbf{T_S}) + \mathbf{2g[3]sin}(\mathbf{1.5}\omega\mathbf{T_S}) + \mathbf{2g[2]sin}(\mathbf{2.5}\omega\mathbf{T_S}) + \mathbf{2g[1]sin}(\mathbf{3.5}\omega\mathbf{T_S})\,]$$

8.2.2 Realisierung mit Signalrückkopplungen: Rekursiv- oder IIR-Struktur

Liegt eine DIFFGL vor, bei der das aktuelle Ausgangssignal $\mathbf{y[k]}$ aus einer gewichteten Summe der verzögerten Werte des Eingangs- und des Ausgangssignals gebildet wird, lautet die Normalform

$$\mathbf{y[k] + a_1 \cdot y[k-1] + a_2 \cdot y[k-2] = b_0 \cdot x[k] + b_1 \cdot x[k-1] + b_2 \cdot x[k-2]} \; .$$

Die Übertragungs-Funktion (im gewählten Beispiel ist sie vom Grad n = ...) lautet dann

$$\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{z^{-1}}) = \frac{\underline{\mathbf{Y}}}{\underline{\mathbf{X}}} = \frac{\mathbf{b_0 + b_1\, z^{-1} + b_2\, z^{-2}}}{\boxed{1} + \mathbf{a_1\, z^{-1} + a_2\, z^{-2}}} \quad ; \quad \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{z}) = \frac{\underline{\mathbf{Y}}}{\underline{\mathbf{X}}} = \frac{\mathbf{b_0\, z^2 + b_1\, z + b_2}}{\boxed{1} \cdot \mathbf{z^2 + a_1\, z + a_2}} \; .$$

Die erste Form wird für die Realisierung benötigt, da hier die Verzögerungsoperatoren enthalten sind. Aus der zweiten Form kann die Lage der Polstellen (sie bestimmen, ob das rückgekoppelte, zeitdiskrete System stabiles Verhalten besitzt) und Nullstellen in der z-Ebene berechnet werden.

Hier beeinflussen die Pol- und Nullstellen den Frequenzgang (d.h. das Filterverhalten) !

Auch wenn es theoretisch möglich wäre, Blöcke mit Funktionen höherer Ordnung (n > 2) zu bilden, nimmt man in der Praxis immer eine Aufteilung in Teilfunktionen vom Grad n = 2 vor.
Bei ungerader Gesamtordnung kommt noch eine Teilfunktion vom Grad n = 1 hinzu.

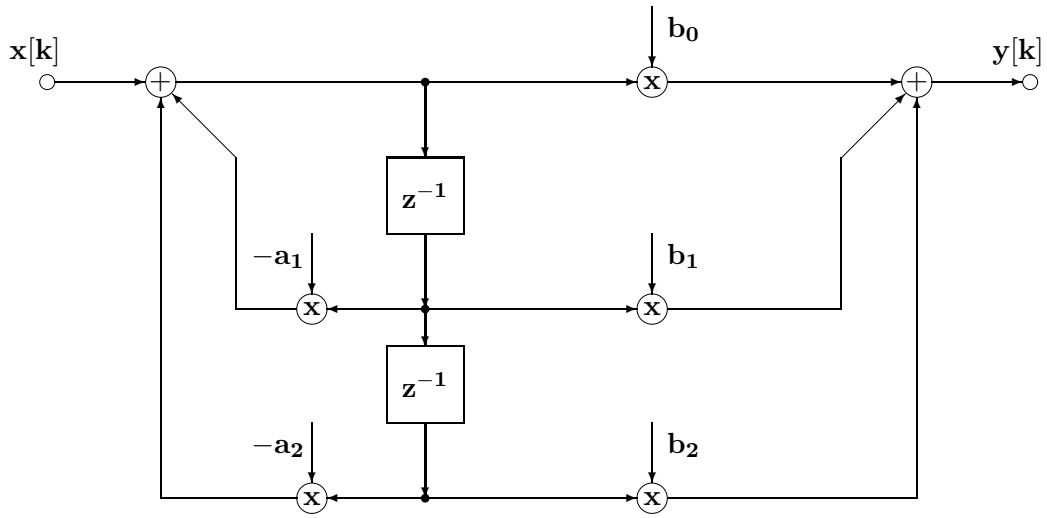
Um in der Praxis auch bei Funktionen höherer Ordnung bestmögliche Eigenschaften zu erhalten, gilt es bei der Realisierung die vorhandenen folgenden Freiheitsgrade gezielt zu nutzen.

1. Geschickte Zusammenfassung von Pol- und Nullstellen zu Teilfunktionen vom Grad 1 oder 2.
2. Auswahl der Reihenfolge und Festlegung der Konstanten der Teilschaltungen vornehmen.
3. Geeignete Skalierung aller Signale zur Optimierung des Dynamikbereiches durchführen.

Diese Notwendigkeit hängt mit den (sehr) großen Empfindlichkeiten der komplexen Verstärkung gegenüber Änderungen der Nenner-Koeffizienten zusammen. Das bedeutet, dass bereits (sehr) kleine Änderungen dieser Koeffizienten große Auswirkungen auf Betrag und Winkel haben können.

Aus der Vielzahl möglicher Realisierungen solcher Übertragungs-Funktionen vom Grad n = 2 wurde für diese Vorlesung eine ausgewählt. Sie ist kanonisch, d.h. sie benötigt nur die dem Grad der Funktion entsprechende Anzahl von Verzögerungen und wird als DIREKTSTRUKTUR II bezeichnet.

Bei Funktionen vom Grad n = 1 entfällt die untere Verzögerung und dort gilt $\mathbf{b_2 = a_2 = 0}$.

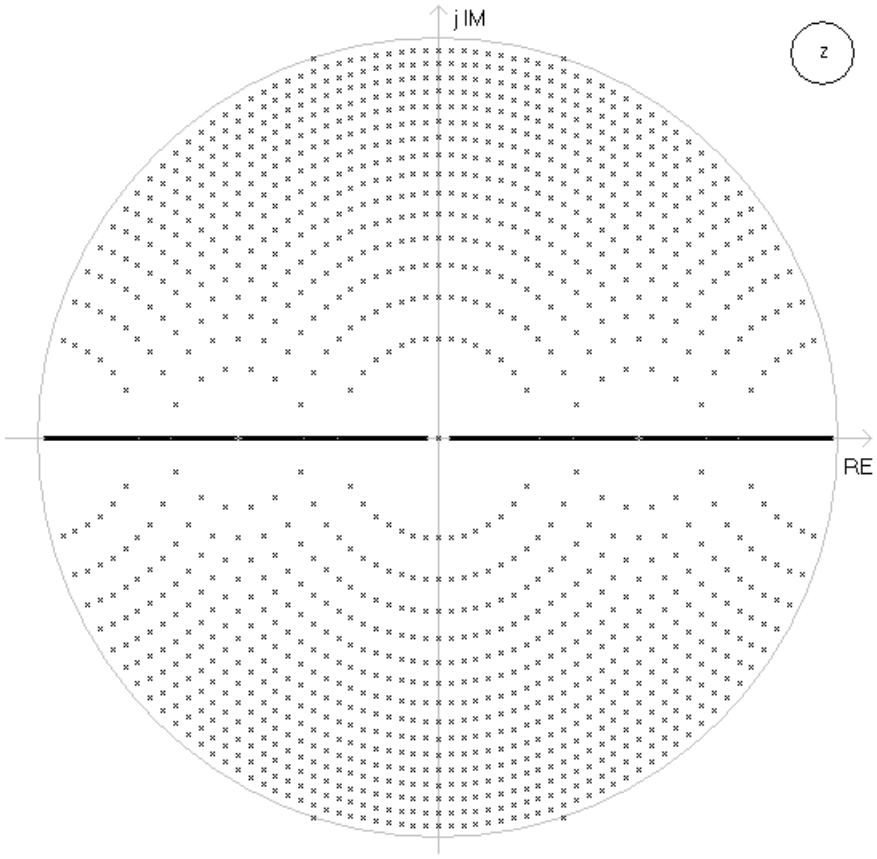


WICHTIG: $\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{z^{-1}})$ m u s s bei dieser Realisierung die oben angegebene Form haben!

Hier steht die englische Abkürzung I(nfinite) I(mpulse) R(esponse) für eine Impulsantwort, die wegen der Rückkopplung(en) zeitlich nicht begrenzt ist.

IIR- Anordnungen können wegen der Rückkopplungen (Rekursionen) instabiles Verhalten besitzen.

Berücksichtigt man, dass für die Darstellung der Koeffizienten immer nur eine begrenzte Stellenzahl (z.B. 8, 16 oder 32 Bit) zur Verfügung steht, ist leicht einzusehen, dass die Polstellen nicht an jedem beliebigen Ort der z-Ebene platziert werden können. Das folgende Bild zeigt die möglichen Pollagen im Inneren des Einheitskreises, wenn die Koeffizienten (nur zur besseren Darstellung im Bild relativ grob) mit 5 Bit und Vorzeichen quantisiert werden [Programm **IIR**].



8.3 Besonderheiten bei der Realisierung zeitdiskreter Systeme

Durch praktische Gegebenheiten entstehen Einflüsse auf das Verhalten eines zeitdiskreten Systems, die zu linearen und auch zu nichtlinearen Abweichungen vom gewünschten Verhalten führen können. Für einen sinnvollen Betrieb eines zeitdiskreten Systems innnerhalb einer analogen Umgebung sind eine Reihe von zusätzlichen Schaltungen erforderlich.

8.3.1 Unerwünschte lineare Effekte

Solche Effekte können oft durch zusätzliche, lineare Anordnungen oder Änderungen bei der Dimensionierung abgeschwächt bzw. sogar beseitigt werden.

- Sample and Hold (siehe die Seiten 93 und 94) führt zu einem Betragsfrequenzgang, der zu hohen Frequenzen hin gemäß $\underline{\mathbf{G_{SH}}}(\mathbf{j}\,\omega) = \mathbf{T_S} \cdot \mathbf{si}(\frac{\omega\,\mathbf{T_S}}{\mathbf{2}})$ absinkt und bei $\omega = \omega_\mathbf{S}$ erstmalig den Wert Null annimmt.
  Abhilfe: Betragsentzerrer vorsehen (Verstärkung $\sim \mathbf{1}/|\underline{\mathbf{G_{SH}}}(\mathbf{j}\,\omega)|$ im Frequenzbereich $\mathbf{0} \le \omega < \mathbf{0.5} \cdot \omega_\mathbf{S}$): Analoge Zusatzschaltung oder digitale Implementierung im Block DSP

- Quantisierung der Koeffizienten der Übertragungs-Funktion mit einer vorgegebenen Wortlänge: Pole und Nullstellen verschieben sich dadurch, der Frequenzgang ändert sich und u.U. tritt instabiles Verhalten auf.
  Abhilfe: Koeffizienten genauer darstellen, wenn nötig Gleitkommadarstellung verwenden.

- Der Transfer und die Verarbeitung der Signale benötigt (abweichend von unserer idealisierten Betrachtung) eine gewisse Zeit, weshalb die (Zwischen-) Ergebnisse nicht sofort sondern immer erst mit einer gewissen Verzögerung zur Verfügung stehen.
  Abhilfe: Taktfrequenzen für die Verarbeitung und/oder für die Abtastung erhöhen.

8.3.2 Unerwünschte nichtlineare Effekte

Bedingt durch die Rückkopplung(en) bei IIR-Systemen sowie durch die in der Praxis immer begrenzte Stellenzahl auch bei der Ausführung arithmetischer Operationen können durch Überläufe, Rundungsfehler und für gewisse Anfangswerte Grenzzyklen oder auch Überlaufschwingungen auftreten. Dann folgt das Ausgangssignal nicht mehr der DIFFGL sondern bleibt auf einem Wert ($\neq 0$) stehen oder pendelt um diesen.

- Quantisierung bei A/D-Wandlung ergibt Verzerrungen und damit ein Quantisierungsgeräusch.
  Abhilfe: A/D-Wandler mit höherer Genauigkeit verwenden
- Überläufe bei den Rechenoperationen MULT und ADD können bei IIR-Strukturen zu sogenannten Überlaufgrenzzyklen (Schwingungen) mit großen Amplituden führen, wenn die Zahlen im 2er-Komplement dargestellt sind.
  Abhilfe: Überläufe durch Skalierung verhindern oder durch Begrenzungskennlinie 'entschärfen', Verhalten bleibt auch dann nichtlinear; alternativ mit Betrag und Vorzeichen arbeiten
- Rundungsfehler nach MULT und ADD können bei nicht ausreichender Stellenzahl in IIR-Strukturen zu Grenzzyklen mit kleinen Amplituden führen.
  Abhilfe: Stellenzahl erhöhen, ggf. Gleikommarechnung verwenden
- Übersteuerung (besonders gefährlich bei mehrstufigen Filtern, dort auch im Inneren möglich!) bewirkt (auch bei Verwendung einer Begrenzungskennlinie) nichtlineare Verzerrungen.
  Abhilfe: Gewissenhafte Skalierung aller Signale
- Durch nichtideale Filter zur Bandbegrenzung und Rekonstruktion verbleiben spektrale Reste bei den Aliasfrequenzen.
  Abhilfe: Filter mit höheren Sperrdämpfungen verwenden

8.3.3 Benötigte Zusatzschaltungen in technischen zeitdiskreten Systemen

Wie auf Seite 93 dargestellt besteht ein System zur digitalen Signalverarbeitung neben dem DSP-Block aus einer Vielzahl weiterer Schaltungen, die unterschiedliche Aufgaben zu erfüllen haben.

- Das Vorfilter (Antialiasing Filter) zur Bandbegrenzung ist meist analog als Tiefpass (selten als Bandpass) in (aktiver) RC-Technik ausgeführt und meist von niedrigem Grad. Bei höhergradigen Filtern (Grad n>2) verwendet man die Kettenschaltung entkoppelter Teilfilter vom Grad eins (nur bei ungeradem Filtergrad) und zwei. Das Filter bewirkt eine Absenkung der Pegel bei hohen Frequenzen und nähert eine Bandbegrenzung des Eingangssignals an. Es ist individuell zu dimensionieren, da die Vorgaben von Fall zu Fall stark variieren können. Eine hohe Abtastfrequenz ('Oversampling') kann die Forderung an dieses Filter entschärfen.
- Abtastschalter und Sample and Hold sind in großer Zahl als integrierte Bausteine verfügbar.
- A/D- und D/A-Wandler gibt es mit 8 - 24 Bit Auflösung für Abtastfrequenzen im Bereich von 20 kHz - 100 MHz als integrierte Bausteine.
- Meist ist es nötig, Verzerrungen des Betragsfrequenzganges (z.B. durch das Sample and Hold) durch einen geeigneten Betragsentzerrer zu kompensieren. Er kann digital im Block DSP implementiert oder auch als analoge Zusatzschaltung realisiert werden.
- Bei Verzerrungen der Gruppenlaufzeit im Nutzband durch alle Filter und Betragsentzerrer (Impulsverformungen!) setzt man als Gruppenlaufzeitentzerrer (bevorzugt digitale und dann im DSP implementierte) Allpass-Schaltungen ein, die zwar den Phasenwinkelverlauf $\varphi(\omega)$ (und damit den Verlauf der Gruppenlaufzeit $\tau_g(\omega) = -d\varphi(\omega)/d\omega$) in der gewünschten Weise beeinflussen, ohne den Betragsverlauf zu verändern.
- Das Nachfilter ist üblicherweise als analoger Tiefpass in (aktiver) RC-Technik ausgeführt und meist von niedrigem Grad. Es beseitigt die Sprünge im treppenförmigen Ausgangssignal des Sample and Hold und reduziert die höherfrequenten Anteile im Ausgangssignal.
  Auch dieses Filter ist passend zu den aktuellen Anforderungen individuell zu dimensionieren.

Auf die zur Stromversorgung und zur Taktversorgung erforderlichen Schaltungen und auf die Problematik durch die enge räumliche Nachbarschaft empfindlicher analoger und schneller digitaler Bausteine kann hier nicht eingegangen werden.

9 Berechnung des Zeitverhaltens zeitdiskreter Systeme

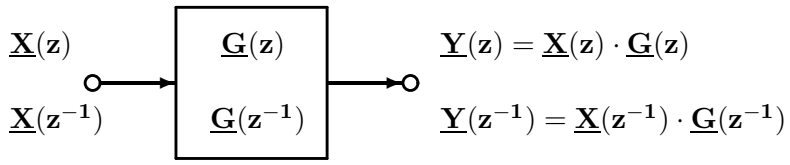
In diesem Kapitel werden die wichtigsten Wege zur Berechnung der Folge $\mathbf{y[k]}$ am Ausgang eines zeitdiskreten Systems dargestellt. Es werden dabei die Einheits-Impulsantwort (EIA, g[k]), die Einheits-Sprungantwort (ESA, h[k]) und auch die Reaktionen auf allgemeine Signale betrachtet.

9.1 Berechnungen unter Verwendung der gebrochen rationalen Bildfunktion

Im Folgenden werden zwei Methoden dargestellt, bei denen die Bildfunktion $\underline{\mathbf{Y}}(\mathbf{z^{-1}}) = \underline{\mathbf{X}}(\mathbf{z^{-1}}) \cdot \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{z^{-1}})$ oder $\underline{\mathbf{Y}}(\mathbf{z}) = \underline{\mathbf{X}}(\mathbf{z}) \cdot \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{z})$ ausgewertet wird. Diesen Vorgang nennt man inverse z-Transformation.

Ist die Übertragungs-Funktion $\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{z^{-1}}) = \dfrac{\underline{\mathbf{Y}}(\mathbf{z^{-1}})}{\underline{\mathbf{X}}(\mathbf{z^{-1}})}$ oder auch $\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{z}) = \dfrac{\underline{\mathbf{Y}}(\mathbf{z})}{\underline{\mathbf{X}}(\mathbf{z})}$ eines zeitdiskreten Systems bekannt, kann diese Beziehung nach dem Ausgangssignal aufgelöst werden. Man erkennt, dass sich auch hier (wie bei kontinuierlichen Systemen) das Ausgangssignal im Bildbereich aus dem Produkt der Bildfunktion des Eingangssignals und der Übertragungs-Funktion berechnen lässt.

Dieses Vorgehen ist besonders zu empfehlen, wenn die Bildfunktion des Eingangssignals in der Korrespondenz-Tabelle auf Seite 109 direkt enthalten ist, oder aus Einträgen der Tabelle zusammengesetzt werden kann.



9.1.1 Einheits-Impuls und Einheits-Sprung im Bildbereich der z-Transformation

Diese beiden wichtigen Testsignale für zeitdiskrete Systeme sind in der Tabelle auf Seite 109 unter den Nummern 1 bzw. 2 enthalten. Die zugehörigen Bildfunktionen sind vom Grad 0 bzw. 1.

Bei Impulsen, die Flächen ungleich 1 umschließen oder bei Sprüngen mit Höhen ungleich 1 müssen die Bildfunktionen durch entsprechende Konstanten modifiziert werden.

Bei Eingangssignalen mit Einheiten (z.B. 5 Vsec; 10 V) müssen die Konstanten mit den zutreffenden Einheiten versehen werden.

9.1.2 Einheits-Impulsantwort (EIA, g[k]), Einheits-Sprungantwort (ESA, h[k])

Wird ein zeitdiskretes System an seinem Eingang mit einem Einheits-Impuls (siehe dazu auch Seite 96) erregt, antwortet es am Ausgang mit einem charakteristischen Signal, das als EIA
(oder auch als Gewichtsfunktion g[k]) bezeichnet wird.

Wegen der besonders einfachen Bildfunktion des Einheits-Impulses $\underline{\mathbf{X}}(\mathbf{z}) = \underline{\mathbf{X}}(\mathbf{z^{-1}}) = \mathbf{1}$ ist die Übertragungs-Funktion zugleich immer auch die Bildfunktion der EIA:

$$\underline{\mathbf{Y}}(\mathbf{z}) = \underline{\mathbf{X}}(\mathbf{z}) \cdot \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{z}) = \mathbf{1} \cdot \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{z}) = \mathbf{EIA}(\mathbf{z}) = \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{z})$$
$$\underline{\mathbf{Y}}(\mathbf{z^{-1}}) = \underline{\mathbf{X}}(\mathbf{z^{-1}}) \cdot \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{z^{-1}}) = \mathbf{1} \cdot \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{z^{-1}}) = \mathbf{EIA}(\mathbf{z^{-1}}) = \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{z^{-1}})$$

Aus der Zeitfunktion der EIA (g[k] = EIA[k]) kann ermittelt werden,

- ob das betrachtete System kausal ist oder nicht:

  Kausale Systeme antworten auf einen Einheitsimpuls zur Zeit t=0 ($\delta[\mathbf{k}]$)
  mit einer EIA g[k], für die gilt : $\mathbf{g[k] = 0}$ für $\mathbf{k < 0}$.

  Dies bedeutet, dass am Ausgang keine Signalreaktion auftreten kann, bevor am Eingang die Erregung wirkt. Praktisch kann man nur solche Systeme realisieren, die nicht schon im Voraus auf zukünftige Signale reagieren.

- ob sich das betrachtete System stabil verhält oder nicht (siehe auch Seite 104):

  Notwendige Bedingung: $\lim\limits_{\mathbf{k}\to\infty} \mathbf{g[k]} = \mathbf{0}$ (1)

  Notwendige und hinreichende Bedingung: $\sum\limits_{\mathbf{k=0}}^{\infty} |\mathbf{g[k]}| < \infty$ (2)

Erregt man ein zeitdiskretes System mit einem Einheits-Sprung (siehe dazu auch Seite 97 Nr. 5), entsteht am Ausgang die ESA h[k], an der man alle wichtigen System-Eigenschaften (Überschwingen, Abklingverhalten, stationärer Endwert, ...) ablesen kann. Deshalb verwendet man bevorzugt eine Sprungfolge als Testsignal für das dynamische Verhalten zeitdiskreter Systeme.

9.1.3 Polynomdivision der Bildfunktion

Ein besonders einfacher Weg zur Ermittlung der Ausgangsfolge ist die Polynomdivision der Bildfunktion. Man erhält hier die einzelnen Werte der Folge, muss aber alle Werte bis zu dem interessierenden Zeitpunkt berechnen.

Beispiel: Gegeben ist die normierte Bildfunktion $\underline{\mathbf{Y}}(\mathbf{z^{-1}}) = \dfrac{\mathbf{8z^{-1}}}{\mathbf{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}}}$.

$$
\begin{array}{llllll}
8z^{-1} + & 0z^{-2} + & 0z^{-3} & : \quad 1 - 3z^{-1} + 2z^{-2} = & z^{-1} - & z^{-2} - \quad z^{-3} - \\
z^{-1} & z^{-2} & z^{-3} & & - & z^{-4} - \quad z^{-5} + \ \ldots \\
\hline
z^{-1} & z^{-2} & z^{-3} & & & \\
 & z^{-2} & z^{-3} & z^{-4} & & \\
\hline
 & z^{-2} & z^{-3} & z^{-4} & & \\
 & & z^{-3} & z^{-4} & z^{-5} & \\
\hline
 & & z^{-3} & z^{-4} & z^{-5} & \\
 & & & z^{-4} & z^{-5} & z^{-6} \\
\hline
 & & & z^{-4} & z^{-5} & z^{-6} \\
 & & & & z^{-5} & z^{-6} \quad z^{-7} \\
\hline
 & & & & z^{-5} & z^{-6} \quad z^{-7}
\end{array}
$$

Die oben berechneten Ergebnisse lassen sich nun als zeitlich verschobene Impulse deuten, die am Ausgang auftreten und deren Intensität durch den jeweiligen Zahlenwert bestimmt ist.

Für die Werte der Ausgangsfolge erhält man deshalb:

$\mathbf{y[0]} =$, $\mathbf{y[1]} =$, $\mathbf{y[2]} =$, $\mathbf{y[3]} =$, $\mathbf{y[4]} =$, $\mathbf{y[5]} =$

Nur in einfachen Fällen gelingt es, das Bildungsgesetz von $\mathbf{y[k]}$ direkt aus den Werten ermitteln.

Hilfreich kann dabei eine Tabelle sein, in der die Werte der Folge $\mathbf{y[k]}$ und deren Differenzen $\mathbf{\Delta = y[k+1] - y[k]}$ eingetragen werden.

Das Bildungsgesetz der berechneten Folge lautet $\boxed{\mathbf{y[k] = (2^{k+3} - 8) \cdot \sigma[k] = 8 \cdot (2^k - 1) \cdot \sigma[k])}}$

Zu dem gleichen Ergebnis kommt man natürlich auch, wenn man von der gleichwertigen Bildfunktion $\underline{\mathbf{Y}}(\mathbf{z}) = \dfrac{\mathbf{8z}}{\mathbf{z^2 - 3z + 2}}$ ausgeht: $\mathbf{8z \ : \ z^2 - 3\,z + 2 \ = \ 8\,z^{-1} + 24\,z^{-2} + 56\,z^{-3} + \ldots}$

Eine schnelle und sichere Aussage über die Kausalität eines Systems erhält man, wenn die Polynomdivision der Übertragungs-Funktion ausgeführt wird.

9.1.4 Partialbruchzerlegung der Bildfunktion und gliedweise Rücktransformation

Jede echt gebrochen rationale Funktion $\underline{\mathbf{Y}}(\mathbf{z})$ lässt sich in drei gleichwertigen Varianten schreiben:

- in der SUMMENFORM (Wie man sie nach Umformung aus der DIFFGL erhält)
- in der PRODUKTFORM (Produkte der Pol- und Nullstellen im Endlichen)
- als PARTIALBRUCHZERLEGUNG (PBZ, Summe von Partialbrüchen)

ACHTUNG, im Weiteren wird nicht $\underline{\mathbf{Y}}(\mathbf{z})$ sondern $\frac{\underline{\mathbf{Y}}(\mathbf{z})}{\mathbf{z}} = \frac{\mathbf{Zähler(z)}}{\mathbf{Nenner(z)}}$ betrachtet !

Die PBZ orientiert sich nur an den POLSTELLEN von $\frac{\underline{\mathbf{Y}}(\mathbf{z})}{\mathbf{z}}$ und je nach dem, welche Vielfachheiten enthalten sind, muss der zutreffende Ansatz für die Zerlegung gewählt werden.

Die Nullstellen der Bildfunktion beeinflussen die Werte der Residuen; sie sind aber an den Partialbrüchen nicht mehr explizit abzulesen.

a) $\frac{\underline{\mathbf{Y}}(\mathbf{z})}{\mathbf{z}}$ enthält nur einfache Polstellen

$$\frac{\underline{\mathbf{Y}}(\mathbf{z})}{\mathbf{z}} = \frac{\underline{\mathbf{r}}_1}{\mathbf{z}-\mathbf{z}_{\infty 1}} + \frac{\underline{\mathbf{r}}_2}{\mathbf{z}-\mathbf{z}_{\infty 2}} + \frac{\underline{\mathbf{r}}_3}{\mathbf{z}-\mathbf{z}_{\infty 3}} + \ldots + \frac{\underline{\mathbf{r}}_n}{\mathbf{z}-\mathbf{z}_{\infty n}} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\underline{\mathbf{r}}_\nu}{\mathbf{z}-\mathbf{z}_{\infty \nu}}$$

Im Allgemeinen sind die RESIDUEN oder PARTIALBRUCH- KOEFFIZIENTEN $\underline{\mathbf{r}}_\nu$ komplexe Größen, deren Berechnung vorteilhaft direkt mit einer der beiden Gleichungen und besser nicht über einen aufwändigen Koeffizientenvergleich erfolgt.

$$\underline{\mathbf{r}}_\nu = \left[\frac{\underline{\mathbf{Y}}(\mathbf{z})}{\mathbf{z}} \cdot (\mathbf{z}-\mathbf{z}_{\infty\nu}) \right]_{\mathbf{z}=\mathbf{z}_{\infty\nu}} \qquad \underline{\mathbf{r}}_\nu = \left[\frac{\mathbf{Zähler(z)}}{\mathbf{d\,Nenner(z)/dz}} \right]_{\mathbf{z}=\mathbf{z}_{\infty\nu}}$$

Reelle Polstellen $\mathbf{z}_{\infty\nu} = \alpha_{\infty\nu}$ führen immer auf reelle Residuen $\mathbf{r}_\nu$.

Gliedweise Rücktransformation ergibt: $\mathbf{y[k]} = [\, \mathbf{r_1} \cdot \mathbf{z}_{\infty 1}^{\mathbf{k}} + \mathbf{r_2} \cdot \mathbf{z}_{\infty 2}^{\mathbf{k}} + \ldots + \mathbf{r_n} \cdot \mathbf{z}_{\infty n}^{\mathbf{k}} \,] \cdot \sigma[\mathbf{k}]$

Konjugiert komplexe Polpaare $\mathbf{z}_{\infty 1,2} = \alpha_\infty \pm \mathbf{j}\,\beta_\infty \qquad \beta > \mathbf{0}$ ergeben im Allgemeinen zwei komplexe Residuen $\underline{\mathbf{r}}_1$, $\underline{\mathbf{r}}_2$, die zueinander konjugiert komplex sind: $\underline{\mathbf{r}}_2 = \underline{\mathbf{r}}_1^*$.

Zur in der z-Ebene oben gelegenen Polstelle $\mathbf{z}_{\infty 1} = \alpha_\infty + \mathbf{j}\,\beta_\infty$ gehört $\underline{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{r_{re}} + \mathbf{j}\,\mathbf{r_{im}}$
und zur unteren Polstelle $\mathbf{z}_{\infty 2} = \alpha_\infty - \mathbf{j}\,\beta_\infty$ gehört das Residuum $\underline{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{r_{re}} - \mathbf{j}\,\mathbf{r_{im}}$.

Bei der Rücktransformation fasst man die beiden, zu einem konjugiert komplexen Polpaar gehörigen konjugiert komplexen Zeitfunktionen zu einer reellen Zeitfunktion zusammen, da sich die beiden entgegengesetzt gleichen Imaginärteile aufheben:

$$\mathbf{y[k]} = [\, \mathbf{2} \cdot |\mathbf{z}_\infty|^{\mathbf{k}} \cdot \sqrt{\mathbf{r_{re}^2} + \mathbf{r_{im}^2}} \cdot \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{\Phi} + \varphi) \,] \cdot \sigma[\mathbf{k}]$$

Mit den Größen: $|\mathbf{z}_\infty| = \sqrt{\alpha_\infty^2 + \beta_\infty^2}$ $\quad \mathbf{\Phi} = \arctan \frac{\beta_\infty}{\alpha_\infty}$ $\quad \varphi = \arctan \frac{\mathbf{r_{re}}}{-\mathbf{r_{im}}}$

Jeder der Winkel $\mathbf{\Phi}$ bzw. φ muss immer dann um $\pm\mathbf{180}^\circ$ korrigiert werden, wenn der Nenner im Argument seiner arctan-Funktion negativ ist.

Diese Korrektur ist also nötig, falls $\alpha_\infty < \mathbf{0}$ bzw. falls $\mathbf{r_{im}} > \mathbf{0}$.
Nur mit diesen Korrekturen werden die Winkel im richtigen Quadranten berechnet!

b) $\frac{\underline{Y}(z)}{z}$ enthält auch mehrfache Polstellen

$$\frac{\underline{Y}(z)}{z} = \frac{\text{Zähler}(z)}{(z-z_{\infty 1})(z-z_{\infty 2})^2} = \frac{\underline{r}_{1,1}}{z-z_{\infty 1}} + \frac{\underline{r}_{2,1}}{(z-z_{\infty 2})^1} + \frac{\underline{r}_{2,2}}{(z-z_{\infty 2})^2} = \sum_{i=1}^{w}\sum_{j=1}^{q_i} \frac{\underline{r}_{i,j}}{(z-z_{\infty i})^j}$$

In der Doppelsumme werden als Laufzahlen i und j verwendet.

w steht für die Anzahl der verschiedenen Polstellen (im Beispiel oben gilt $w =$).

q_i beschreibt die Vielfachheit der Polstelle i (im Beispiel : $q_1 =$, $q_2 =$).

$n = q_1 + q_2 + q_3 + \ldots + q_w$ gibt den Grad des Nennerpolynoms an (im Beispiel: $n =$).

Die Berechnung der im Allgemeinen komplexen RESIDUEN $\underline{r}_{i,j}$ erfolgt für alle verschiedenen Polstellen $i = 1, 2, 3, \ldots, w$ entsprechend deren Vielfachheiten für $j = 1, 2, 3, \ldots, q_i$ mit der folgenden Gleichung.

$$\underline{r}_{i,j} = \frac{1}{(q_i - j)!} \cdot \frac{d^{q_i - j}}{dz^{q_i - j}} \left[\frac{\underline{Y}(z)}{z} \cdot (z - z_{\infty i})^{q_i} \right] \mid z = z_{\infty i}$$

Ü 67 - Ü 69, Ü 72

Beim Bilden der Ableitung muss meist die QUOTIENTENREGEL angewendet werden!

Reelle Polstellen $z_{\infty i} = \alpha_{\infty i}$, die in der Praxis durchaus auch mit Vielfachheiten $q_i > 1$ vorkommen, führen immer auf reelle Residuen $r_{i,j}$.

Konjugiert komplexe Polpaare $z_{\infty 1,2} = \alpha_\infty \pm j\,\beta_\infty$, die in der Praxis fast ausnahmslos nur einfach auftreten, ergeben i. A. zwei komplexe Residuen $\underline{r}_1$, $\underline{r}_2$, die zueinander konjugiert komplex sind: $\underline{r}_2 = \underline{r}_1^*$. Einfache Polstellen werden nach Seite 122 behandelt.

Zu der in der z-Ebene oben gelegenen Polstelle $z_{\infty 1} = \alpha_\infty + j\,\beta_\infty$ gehört $\underline{r}_1 = r_{re} + j\,r_{im}$ und zu der unteren Polstelle $z_{\infty 2} = \alpha_\infty - j\,\beta_\infty$ gehört $\underline{r}_2 = r_{re} - j\,r_{im}$.

Gliedweise Rücktransformation unter der Annahme reeller Polstellen:

$$y[k] = [\, r_{1,1} \cdot z_{\infty 1}^k + r_{2,1} \cdot z_{\infty 2}^k + r_{2,2} \cdot k \cdot z_{\infty 2}^{k-1} \,] \cdot \sigma[k]$$

Betrachtet man die PBZ einer Übertragungs-Funktion $\underline{G}(z)$ d.h. die PBZ der EIA und die zu den einzelnen Partialbrüchen gehörigen Teilfolgen, ergibt sich eine wichtige Aussage über die Stabilität:

Liegen ALLE POLSTELLEN $z_{\infty i}$ DER ÜBERTRAGUNGS-FUNKTION $\underline{G}(z)$
IM INNEREN DES EINHEITSKREISES d.h. es gilt für alle i $|z_{\infty i}| < 1$,
verhält sich das ZEITDISKRETE SYSTEM S T A B I L.

Nur unter diesen Voraussetzungen besteht die EIA ausschließlich aus solchen Teilfolgen, die einzeln und damit auch in ihrer Summe mit der Zeit abklingen.

Beachten Sie im Unterschied dazu die entsprechende Bedingung für zeitkontinuierliche Systeme.

Liegen ALLE POLSTELLEN $s_{\infty i}$ DER ÜBERTRAGUNGS-FUNKTION $\underline{G}(s)$
IN DER OFFENEN, LINKEN s- HALBEBENE d.h. es gilt für alle i $RE\{s_{\infty i}\} < 0$,
verhält sich das ZEITKONTINUIERLICHE SYSTEM S T A B I L.

Nur unter diesen Voraussetzungen besteht die EIA ausschließlich aus solchen Teilfunktionen, die einzeln und damit auch in ihrer Summe im Laufe der Zeit abklingen.

Drei Beispiele zur Partialbruch-Zerlegung von Bildfunktionen

$$\underline{\mathbf{Y_1}}(\mathbf{z^{-1}}) = \frac{\mathbf{8z^{-1}}}{\mathbf{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}}} \quad ; \qquad \underline{\mathbf{Y_2}}(\mathbf{z}) = \frac{\mathbf{7z^3 - 10.1z^2 + 3.12z}}{\mathbf{(z-1)(z-0.9)^2}}$$

$$\underline{\mathbf{Y_3}}(\mathbf{z}) = \frac{\mathbf{7z^4 - 6.8z^3 + 0.8z^2 + 0.74z}}{\mathbf{z(z+0.5)(z^2 - z + 0.74)}}$$

Ü 71

Gesucht: a.) Die zugehörigen Partialbruch-Zerlegungen der Bildfunktionen.

b.) Die zugehörige Folgen $\mathbf{y_1[k], y_2[k], y_3[k]}$.

c.) Existieren endliche Grenzwerte $\mathbf{y_1[k \to \infty], y_2[k \to \infty], y_3[k \to \infty]}$? Welche?

d.) Überprüfen Sie die endlichen Grenzwerte mit dem Grenzwertsatz auf Seite 109.

9.2 Berechnung der Ausgangsfolge $\mathbf{y[k]}$ im Zeitbereich

Ist für das Eingangssignal keine Bildfunktion verfügbar, ermittelt man das Ausgangssignal $\mathbf{y[k]}$ direkt im Zeitbereich. Hier werden zwei Methoden für dieses Vorgehen behandelt.

9.2.1 Rekursive Berechnung von $\mathbf{y[k]}$ aus der DIFFGL

Sind die einzelnen Werte einer beliebigen Eingangsfolge $\mathbf{x[k]}$ bekannt, gelingt es mit Hilfe der DIFFGL, die zugehörige Ausgangsfolge $\mathbf{y[k]}$ rekursiv für $\mathbf{k \geq 0}$ zu berechnen.

Dazu löst man die DIFFGL (im folgenden Beispiel ist diese vom Grad 2)

$$\mathbf{y[k] \cdot a_0 + y[k-1] \cdot a_1 + y[k-2] \cdot a_2 = x[k] \cdot b_0 + x[k-1] \cdot b_1 + x[k-2] \cdot b_2}$$

nach dem aktuellen Ausgangssignal $\mathbf{y[k]}$ auf

$$\boxed{\mathbf{y[k] = \frac{1}{a_0} \cdot [\ \{-y[k-1] \cdot a_1 - y[k-2] \cdot a_2\} + \{x[k] \cdot b_0 + x[k-1] \cdot b_1 + x[k-2] \cdot b_2\}\ ]}}$$

und setzt (soweit erforderlich) alle nötigen Anfangswerte $\mathbf{y[-1]}$, $\mathbf{y[-2]}$ und $\mathbf{x[-1]}$, $\mathbf{x[-2]}$ (bei kausalen Eingangssignalen gilt immer $\mathbf{x[-1] = 0}$, $\mathbf{x[-2] = 0}$) ansonsten die Ersatzwerte Null ein.

Bei der schrittweisen Berechnung der Ausgangsfolge für die Zeitpunkte $\mathbf{k = \frac{t}{T_S} = 0, 1, 2, \ldots}$ beeinflusst neben dem aktuellen Signal am Eingang $\mathbf{x[k]}$, der Vergangenheit des Eingangssignals $\mathbf{x[k-1]}$, $\mathbf{x[k-2]}$ auch die Vergangenheit des Ausgangssignals $\mathbf{y[k-1]}$, $\mathbf{y[k-2]}$ den Wert des aktuellen Ausgangssignals $\mathbf{y[k]}$ genau so, wie es durch die DIFFGL vorgegeben ist.

Bei Systemen höherer Ordnung wirken auch länger zurückliegende Momentanwerte des Ausgangs- und des Eingangssignals auf das aktuelle Ausgangssignal ein.

Ist statt der DIFFGL zunächst nur die Übertragungs-Funktion eines zeitdiskreten LTI-Systems bekannt, geht man wie folgt vor:

1.) $\mathbf{\underline{G}(z) = \frac{\underline{Y}(z)}{\underline{X}(z)} = \frac{c_0 + c_1 z + c_2 z^2}{d_0 + d_1 z + d_2 z^2} \quad \Longrightarrow \quad \underline{G}(z^{-1}) = \frac{\underline{Y}(z^{-1})}{\underline{X}(z^{-1})} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}}$

2.) Über Kreuz ausmultiplizieren: $\mathbf{\underline{Y} \cdot [\ a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}\ ] = \underline{X} \cdot [\ b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}\ ]}$

3.) Rücktransformation in den Zeitbereich liefert die DIFFGL. Weiteres Vorgehen: Siehe oben.

$$\mathbf{y[k] \cdot a_0 + y[k-1] \cdot a_1 + y[k-2] \cdot a_2 = x[k] \cdot b_0 + x[k-1] \cdot b_1 + x[k-2] \cdot b_2}$$

Beispiel: Gegeben ist die normierte Übertragungs-Funktion $\mathbf{\underline{G}(z) = \frac{\underline{Y}(z)}{\underline{X}(z)} = \frac{0.1(z+1)}{z - 0.8}}$.

a.) Stellen Sie die zugehörige DIFFGL auf.

b.) Berechnen Sie die Ausgangsfolge $\mathbf{y[k]}$, $(\mathbf{0 \leq k \leq 7})$, für $\mathbf{x[k] = 2 \cdot k \cdot \sigma[k]}$.

9.2.2 Berechnung der Ausgangsfolge $\mathbf{y[k]}$ mit der Faltungsoperation

Auch bei zeitdiskreten Systemen besteht die Möglichkeit, das Ausgangssignal $\mathbf{y[k]}$ durch die Faltung des Eingangssignals $\mathbf{x[k]}$ mit der EIA des Systems $\mathbf{g[k]}$ zu berechnen.

Im Unterschied zum FALTUNGSINTEGRAL bei kontinuierlichen, kausalen Systemen und Signalen

$$\mathbf{a(t)} \;=\; \mathbf{e(t)} * \mathbf{g(t)} \;=\; \mathbf{g(t)} * \mathbf{e(t)} \;=\; \int_{\tau=0}^{t} \mathbf{e}(\tau)\cdot\mathbf{g(t-\tau)}\,\mathbf{d}\tau \;=\; \int_{\tau=0}^{t} \mathbf{g}(\tau)\cdot\mathbf{e(t-\tau)}\,\mathbf{d}\tau$$

ist bei kausalen, zeitdiskreten Systemen die folgende FALTUNGSSUMME auszuwerten.

$$\mathbf{y[k]} \;=\; \mathbf{x[k]} * \mathbf{g[k]} \;=\; \mathbf{g[k]} * \mathbf{x[k]} \;=\; \sum_{\mathbf{i}=-\infty}^{\mathbf{k}} \mathbf{x[i]}\cdot\mathbf{g[k-i]} \;=\; \sum_{\mathbf{i}=0}^{\infty} \mathbf{g[i]}\cdot\mathbf{x[k-i]}$$

Wegen des Produktes $\mathbf{x[i]}\cdot\mathbf{g[k-i]}$ bzw. $\mathbf{g[i]}\cdot\mathbf{x[k-i]}$ in der Summe ist nur über die Bereiche von $\mathbf{i}$ zu summieren, in denen beide Faktoren ungleich Null sind.

Zur Ausführung der Faltungsoperation werden hier zwei Varianten betrachtet, die mit unterschiedlichen Betrachtungen zum gleichen Ergebnis führen:

1. Auf Seite 126 : Eine anschaulich leicht verständliche Form, bei der die Addition von zeitverschobenen, gewichteten Einheits-Impulsantworten das gesuchte Signal $\mathbf{y[k]}$ ergibt.
2. Auf Seite 127 : Eine abstraktere Form, die sich an die Gleichung für die Faltungssumme hält und das Ausgangssignal $\mathbf{y[k]}$ durch Umklappen ('Falten'), Verschieben, Bewerten und Summieren aus der Einheits-Impulsantwort ermittelt.

Das Verständnis beider Möglichkeiten wird durch den Gebrauch des Programms **FALTUNG** erleichtert, das auch zur Erstellung der Bilder auf den beiden folgenden Seiten verwendet wurde.

Achten Sie bei der Benutzung darauf, für die Faltungssumme die zeitdiskrete Darstellung mit dem Button kont / disk einzustellen.

Beispiel:

Berechnen Sie mit der Faltungsoperation das Ausgangssignal $\mathbf{y[k]}$ eines zeitdiskreten Systems, wenn

- am Eingang das Signal $\mathbf{x[k]} = \sigma\mathbf{[k]} - \sigma\mathbf{[k-6]}$ anliegt und
- die EIA durch $\mathbf{g[k]} = \mathbf{0.8^k}\cdot\sigma\mathbf{[k]}$ gegeben ist.

Ü 73

a.) Skizzieren Sie Folgen $\mathbf{x[k]}$ und $\mathbf{g[k]}$ für $\mathbf{-2 \le k \le 10}$.

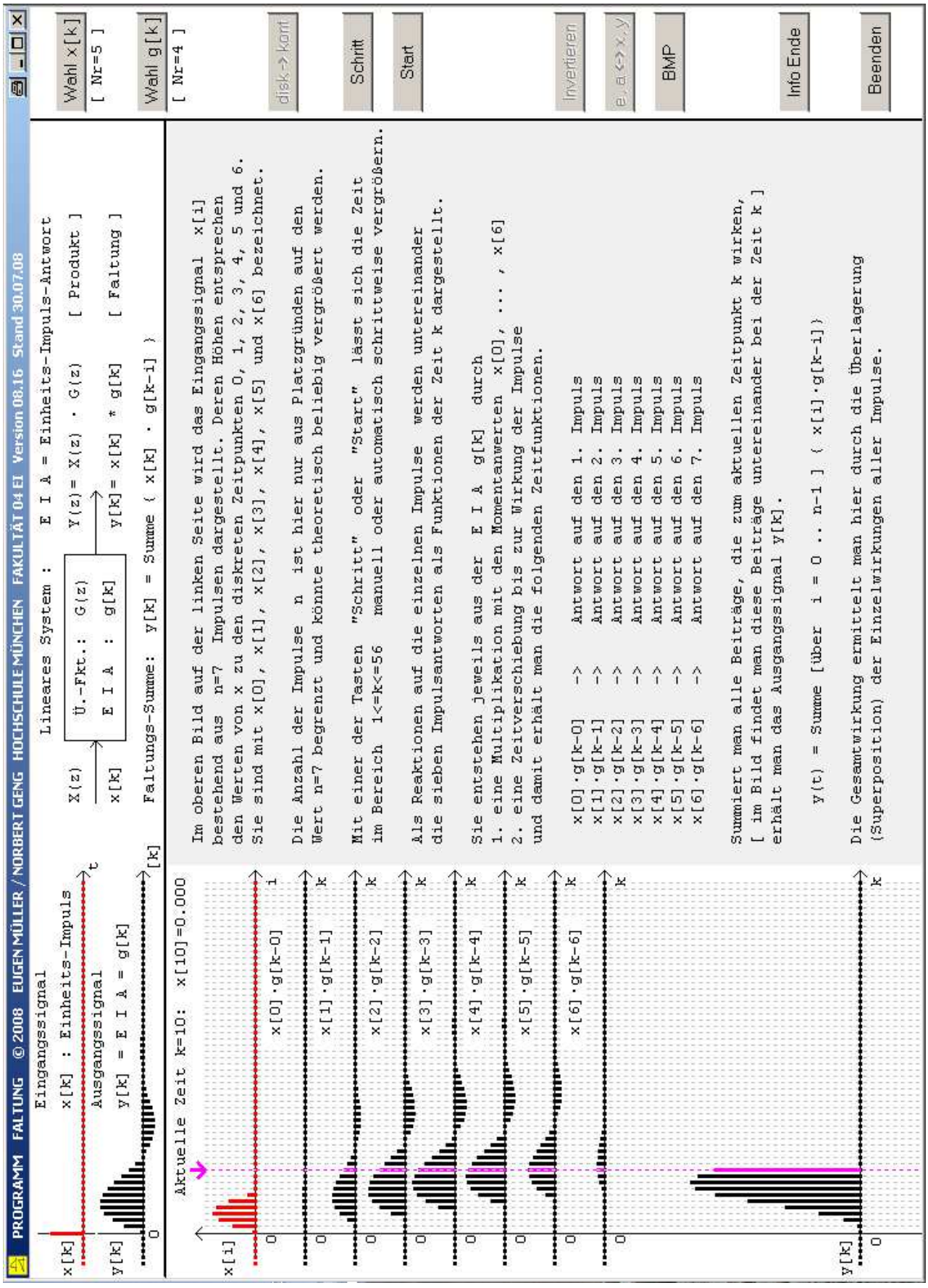
b.) Ist das betrachtete System kausal? Begründen Sie die Antwort kurz aber treffend.

c.) Ist das vorliegende Eingangssignal kausal? Geben Sie auch hierzu eine kurze Begründung an.

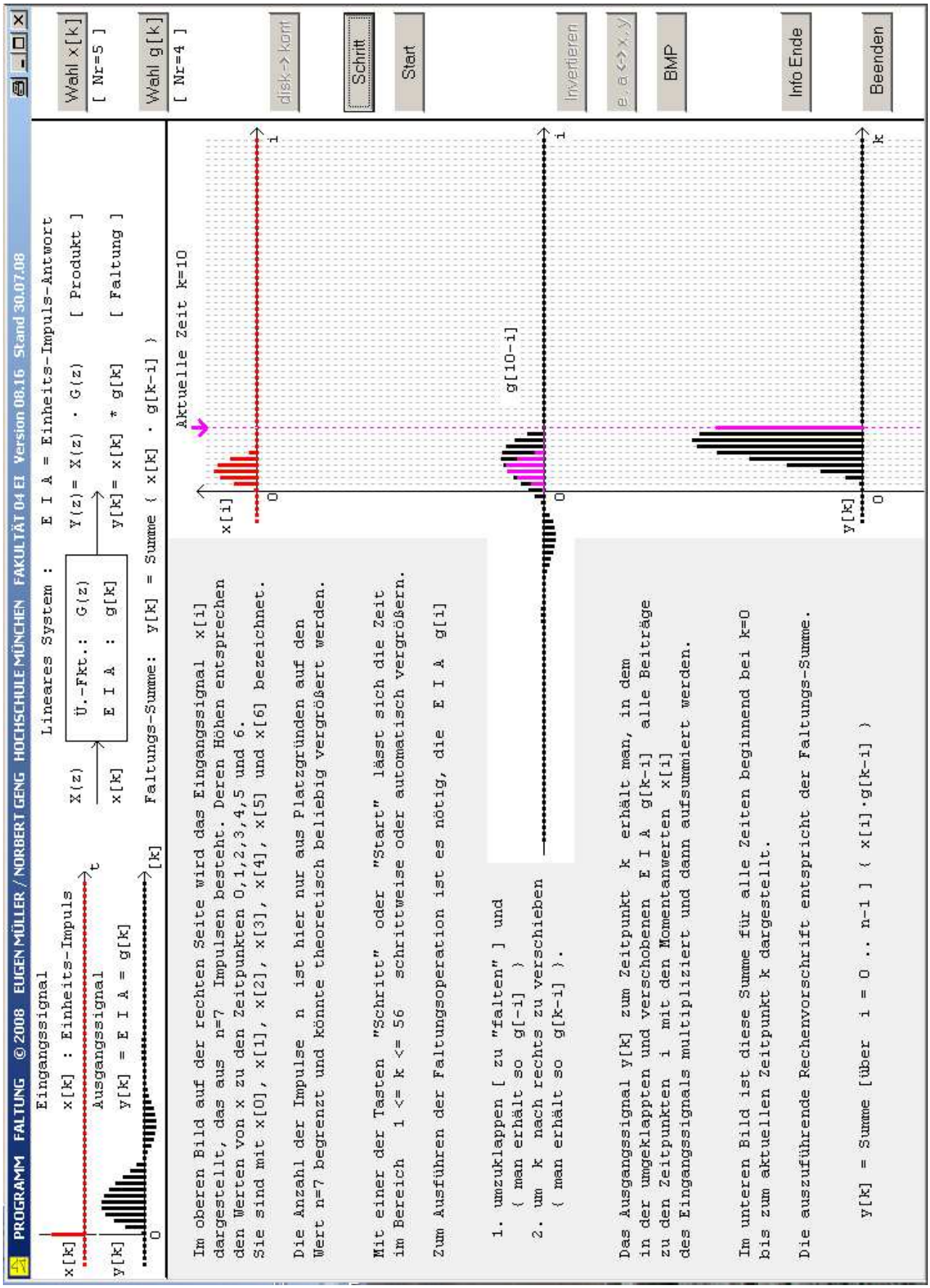
d.) Führen Sie nun die Faltung gemäß $\mathbf{y[k]} = \sum \mathbf{g[i]}\cdot\mathbf{x[k-i]}$ aus und verwenden Sie dabei die Summe über n+1 Glieder der geometrischen Folge $\mathbf{S_n} = \sum_{\mathbf{m=0}}^{\mathbf{n}} \mathbf{q^m} = \dfrac{\mathbf{1-q^{n+1}}}{\mathbf{1-q}}$ für $\mathbf{q \ne 1}$.

.

Ausführung der Faltung durch Addition zeitverschobener, gewichteter Einheits-Impulsantworten



Ausführung der Faltung durch Umklappen, Verschieben, Bewerten der EIA und Summieren



10 Software, Übungen, Literatur

KOSTENLOSE SOFTWARE ZUR VORLESUNG:

ZIP-Files der Programme für Microsoft-Windows Betriebssysteme (Win XP / 7 / 10) sind zum Download abgelegt unter

e-technik-software.de

ÜBUNGSAUFGABEN:

Zusammen mit dem Skriptum wird eine Sammlung von 75 Übungsaufgaben mit Lösungen angeboten.

LITERATURHINWEISE:

Zur Studier- und Lerntechnik

Knoblauch: Lernstress ade! Tempus Verlag, Giengen.

Dittrich: Mehr Erfolg bei Prüfungen. ECON-Ratgeber.

Ratschläge zur Vorbereitung auf (Wiederholungs-) Prüfungen finden Sie im Internet bei der Software (siehe oben).

Zum Stoff der Vorlesung:

Bronstein u.a.: Taschenbuch der Mathematik, Verlag Harri Deutsch.

Papula: Mathematische Formelsammlung. Verlag Vieweg.

Klein: Schaltungen und Systeme. Oldenbourg Verlag.

Föllinger: Laplace- und Fourier-Transformation. Hüthig Buch Verlag.

Heinemann: PSPICE, Einführung in die Elektroniksimulation. Hanser Verlag.

v. Grünigen: Digitale Signalverarbeitung. Fachbuchverlag Leipzig.

Kammeyer, Kroschel: Digitale Signalverarbeitung. Teubner Studienbücher.

Rabiner, Gold: Theory and Application of Digital Signal Processing. Prentice Hall.

Brigham: FFT, Schnelle Fourier-Transformation. Oldenbourg Verlag.